॥ श्रीः ॥

काशी-संस्कृत-ग्रन्थमाला

८१

ManMohan J Rishi

काशी, बिहार, उत्कल, हिन्दूविश्वविद्यालय, पञ्जाब
आदिकी प्रथम परीक्षामें स्वीकृत गणित
विषय की पाठ्य पुस्तक

गणितकौमुदी

रचयिता

पण्डित श्री गणपतिदेव शास्त्री



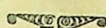
चौखम्बा संस्कृत सीरिज आफिस, बनारस-१

R

॥ श्रीः ॥

❀ काशी-संस्कृत-ग्रन्थमाला ❀

८१



गणितविभाग (१) प्रथमपुष्प



॥ श्रीः ॥

गणितकौमुदी

(द्वितीय भाग)

अनेक प्रकार के उदाहरण तथा प्रश्नों से युक्त

काशी, बिहार, उत्कल, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, पंजाब आदि की संस्कृत परीक्षाओं में स्वीकृत गणित विषय की पाठ्य पुस्तक

रचयिता

ज्यौतिषाचार्यवर्य महामहोपाध्याय

श्री ६ बापूदेव शास्त्री के पुत्र

साहित्याचार्य

पण्डित गणपतिदेव शास्त्री



चौखम्बा-संस्कृत-सीरिज, बनारस-१

प्रकाशक:—
जयकृष्णदास हरिदास गुप्तः,
चौखम्बा-संस्कृत-सीरिज आफिस,
पो० बाक्स नं० ८, बनारस
संवत् २०११

The Chowkhamba Sanskrit Series Office,
P. O. Box 8, Banaras.
1954.
(द्वितीयं संस्करणम्)

मुद्रकः—
विद्याविलास प्रेस,
बनारस-१

भूमिका

करुणामयी भगवती श्रीजगज्जननी की महती कृपा से गणितकौमुदी के द्वितीय भाग का द्वितीय संस्करण प्रकाशित हो रहा है। इस संस्करण में बहुत से आवश्यक विषय और जोड़े गये हैं। इस परिवर्धित संस्करण में निम्नलिखित विषय उदाहरणों के साथ आगये हैं:—

(१) यौगिकसंख्या, रूढसंख्या और रूढगुणनखण्ड, (२) महत्तमसमापवर्तक, (३) लघुतमसमापवर्त्य, (४) भिन्न, (५) दशमलवगणित, (६) आवर्तदशमलव, (७) दशमलव भिन्न का रूपभेद, (८) वर्ग, (९) वर्गमूल, (१०) घन, (११) घनमूल, (१२) व्यवहारगणित, (१३) ऐकिकनियम, (१४) गुणोत्तर और अनुपात, (१५) त्रैराशिक, (१६) बहुराशिक, (१७) औसत वा मध्यसमान, (१८) क्षेत्रफल, (१९) घनफल, (२०) प्रतिशत वा प्रतिसैकड़ा, (२१) साधारण ब्याज, (२२) उत्तरमाला।

परीक्षाओं के लिये आवश्यक सब विषय इसमें आगये हैं। कुछ अन्य व्यवहारोपयोगी विषय भी हैं।

पूर्व संस्करणों की भूमिका में जो बात हमने लिखी थी वह यहां भी लिखनी है। गणित का विषय समझना-समझाना दोनों ही रीति की सुगमता और नियमों की शुद्धता पर निर्भर है, गणितसम्बन्धी जिन पुस्तकों में इन बातों का विचार नहीं रखा जाता उनके सदोषनियमों और अशुद्धरीतियों तथा उदाहरणों से विद्यार्थी भ्रम में पड़ते और उनके परिश्रम व्यर्थ होते हैं। अतः इस पुस्तक में रीति की सुगमता और नियमों की शुद्धता का पूरा ध्यान रखा गया है। जो उदाहरण दिये गये हैं वे भी सर्वथा शुद्ध हैं। विषय समझाने की शैली भी इतनी सरल और सुबोध रखने की चेष्टा की गयी है कि विद्यार्थी पुस्तक हाथ में लेकर प्रत्येक विषय अनायासेन समझ लेंगे।

अन्त में प्रस्तुत पुस्तक के प्रकाशक, चौखम्बा संस्कृत पुस्तकालय के अध्यक्ष बाबू श्री जयकृष्णदास जी गुप्त महोदय, जिन्होंने इसबार प्रस्तुत द्वितीय संस्करण को बहुत सावधानी और शुद्धता के साथ छापकर प्रकाशित किया है, उन्हें धन्यवाद देना भी मैं अपना कर्तव्य समझता हूँ।

गणपतिदेव शास्त्री

विषयानुक्रमणिका

विषय	पृष्ठ
यौगिकसंख्या, रूढसंख्या और रूढ-गुणनखण्ड	१
रूढसंख्या की पहचान और अपवर्तन के कुछ नियम	७
महत्तम समापवर्तक	९
लघुतम समापवर्त्य	१३
भिन्नसंख्या का व्युत्पादन	१८
,, रूपान्तर	२३
,, ध्यान में रखने योग्य नियम	२९
,, न्यूनाधिक भाव	३१
,, संकलन	३२
,, व्यवकलन	३५
,, गुणन	३८
,, भाग	४१
,, महत्तम समापवर्तक और और लघुतम समापवर्त्य	४४
कोष्ठों का प्रयोग	४५
वितत भिन्न वा वर्द्धित भिन्न	५०
वितत भिन्न को उसके मूल भाग जाति भिन्न के संक्षिप्तरूप में लाने का प्रकार	५१
भिन्न संख्याओं को सरल करने का नियम	५३
भिन्न संख्याओं का रूप भेद	५६
भिन्न के सम्बन्ध के कुछ प्रश्न	६२

विषय	पृष्ठ
दशमलव का व्युत्पादन	६८
दशमलव को भिन्नसंख्या में परिवर्तित करने का प्रकार	७१
दशमलव का संकलन	७२
,, व्यवकलन	७३
,, गुणन	७४
,, भागहार	७६
साधारण भिन्न को दशमलव का रूप देने का प्रकार	७८
दशमलव का महत्तम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य	८०
दशमलव भिन्न का संक्षिप्त गुणन	८१
दशमलव भिन्न का संक्षिप्त भागहार	८३
शुद्ध और मिश्र आवर्त दशमलव	८६
आवर्त दशमलवों का लेखन तथा शुद्ध आवर्त दशमलव को साधारण भिन्न का रूप देने का प्रकार	८७
मिश्र आवर्त दशमलव को साधारण भिन्न के रूप में लाने का प्रकार	८८
आवर्त दशमलवों का योग और अन्तर	९०
आवर्त दशमलवों का गुणन और भागहार	९२

विषय	पृष्ठ
दशमलव भिन्न का रूपभेद	९४
वर्ग	९७
वर्गमूल	१०३
घन	१०९
घनमूल	११३
अमिश्र व्यवहार गणित	१२०
मिश्र व्यवहार गणित	१२४
गुणोत्तर और अनुपात	१२८
त्रैराशिक	१३२
बहुराशिक (पञ्चराशिक, सप्तराशिक आदि)	१४३
काल, काम, गति आदि के उदाहरण	१५०
ऐकिक नियम	१५५
औसत अथवा मध्यममान	१६०
क्षेत्रफल	१६४
घनफल	१७७
प्रतिशत वा प्रतिसैकड़ा	१८४
साधारण व्याज	१८६
उत्तरमाला	१९३



शुद्धिपत्र

द्वितीयभाग

पृष्ठसंख्या	पंक्तिसंख्या	शुद्ध	अशुद्ध
५	७	इस	इन
६	२०	२३०४०	३०४०
७	२९	४ इस अन्य संख्या से	इस अन्य संख्या से
८	१३	नीचे	निचे
९	६	(४०)	(४)
१५	१२	सङ्ख्याओं का	सङ्ख्यओं का
१६	१०	= २५२० यह अभीष्ट	= यह अभीष्ट
१९	२६	३ रु०	३ रु
२०	८	जब छेद के	तब छेद के
२३	३	$\frac{३}{५}$ की	$\frac{३}{५}$ का
२५	२५	(१०९)	अक्रम (१०९)
३१	५	लघुतमापवर्त्य	लघुतमापवर्य
३३	१९	∴	∵
४८	२५	$\frac{१९}{१२} \div \frac{१३}{२४}$ मध्यम कोष्ठ को दूर करने से,	$\frac{१९}{११} \div \frac{१९}{२४}$ सध्यम कोष्ट को दूर करने, से
६६	८	उसने	उससे
७३	२६	संख्या	सांख्य
८४	१३	भाजक	भजक
८८	२०	अ = ·२५५५५ इ०	अ = २·५५५५ इ०
९२	१६	७·१२̇३̇	७·१२३̇
९६	१२	८$\frac{१}{२}$ शि०	८$\frac{१}{२}$
९७	२०	इसको	इनको
१०२	१३	उसके तुल्य होगा।	इसके अति ··· तुल्य होगा।

१०२	१५	७५·३०३८२३	७५·३०३७२३
१०३	१७	$\sqrt{\frac{१६}{८१}}$	$\frac{१६}{८१}$
१०५	२०	विषम	विषय
१०९	५	$\frac{१२५}{१३३१}$	$\frac{१२५}{११३१}$
११७	१८	+ १४	× १४
१४५	२३	१२ × १५ : ३६ × ३०	१२ × १५ : ३६ = ३०
१४५	२४	(१८०) प्रक्रम से	(१४०) प्रक्रम से
१४८	१८	२७ दिन :: १८ दिन	२७ दिन : १८ रुपये
१५२	११	१ घण्टे में	२ घण्टे में
१५२	२०	अर्थात् १६८	अर्थात् २६८
१५८	८	$\frac{४५\times१९८\times१२०}{७५}$	$\frac{४५\times१९८\times३२०}{७५}$
१५८	१०	$\frac{४५\times१९८\times१२०}{७५\times१३२} = १०८$	$\frac{४५\times१९८\times१२०}{७५\times१३२} + १०८$
१६०	१	चाल से	चाल
१६२	२७	प्रतिदिन की मजदूरी मिली	मजदूरी मिली
२०४	१०	(३६) $\cdot\dot{३}$	(३६) ·०१४
२०७	२०	(४९) १८२ पृष्ठ से १८४ पृष्ठ तक	(४९) १८२ पृष्ठ से १८५ पृष्ठ तक

❀ श्रीः ❀

गणितकौमुदी

द्वितीय भाग

सिन्दूरसुन्दरतनोर्नवचन्द्रमौले-
विघ्नावलीतिमिरवासरनायकस्य ।
वाञ्छाधिकं वितरतो दयया नतेभ्यो
नागाननस्य चरणाम्बुजमाश्रयामः ॥ १ ॥

पण्डितमण्डलमण्डनबापूदेवोद्भवः प्रथमम् ।
गणपतिशास्त्री कृत्वा पूर्वार्द्धं गणितकौमुद्याः ॥ २ ॥
अधुना तदुत्तरार्द्धं हृद्यं सम्यक्परीक्षणश्रेणीम् ।
अधितिष्ठतां वितनुते छात्राणां बोधजननाय ॥ ३ ॥

यौगिकसंख्या, रूढसंख्या और रूढगुणनखण्ड

(७६) जो संख्या १ को और स्वयं उस संख्या को छोड़ कर किसी दूसरी संख्या से पूरी विभाजित होती है उसको **यौगिकसंख्या** वा **अदृढसंख्या** कहते हैं। जैसे, ४, ६, ९ इत्यादि यौगिक संख्या हैं।

(७७) जो संख्या १ को और स्वयं उस संख्या को छोड़ कर किसी दूसरी संख्या से पूरी विभाजित नहीं होती है उसको **रूढसंख्या** वा **दृढसंख्या** कहते हैं। जैसे, १, २, ३, ५, ७ इत्यादि रूढ संख्या हैं।

(७८) २ और ५ को छोड़ कर जितनी रूढ संख्याएँ होंगी, उनके इकाई के स्थान में १, ३, ७ और ९ इनमें से कोई एक अङ्क अवश्य रहेगा।

(७९) दो संख्याओं में छोटी संख्या का बड़ी संख्या में भाग देने से यदि कुछ शेष न रहे, तो उस छोटी संख्या को बड़ी संख्या का **गुणनखण्ड, उत्पादक अवयव** वा **अपवर्तक** कहते हैं। और बड़ी संख्या को छोटी संख्या का **अपवर्त्य** कहते हैं। जैसे १२ और ४ इन दो संख्याओं में १२ यह ४ से पूरी विभाजित होती है, इसलिये १२ का ४ अपवर्तक, और ४ का १२ अपवर्त्य होता है।

(८०) जब कि प्रत्येक संख्या १ से पूरी विभाजित होती है, तब प्रत्येक संख्या का १ अपवर्तक, और १ का अपवर्त्य प्रत्येक संख्या होगी। परन्तु अपवर्त्य और अपवर्तक इन दो शब्दों का व्यवहार उन्हीं दो संख्याओं में होता है, जिनमें छोटी संख्या १ नहीं होती है।

(८१) जो संख्या दो वा अधिक संख्याओं में से प्रत्येक से निःशेष विभाजित होती है, उस संख्या को उन दो वा अधिक संख्याओं का **समापवर्त्य** कहते हैं।

जैसे, ३६ यह संख्या ३, ४, ६ इन संख्याओं का समापवर्त्य है।

(८२) यदि अनेक संख्याओं का एक अपवर्तक हो, तो उसको उन संख्याओं का **समापवर्तक** कहते हैं।

जैसे, २४ और ३६ का ४ यह समापवर्तक होता है।

(८३) जब कोई योगिक वा अदृढ संख्या किसी दूसरी संख्या से पूरी विभाजित होती है, तब उस भाजक और लब्धि को उस यौगिक संख्या के **अवयव** कहते हैं। जैसे, १८ के ९ और २ यह अवयव हैं। और यदि उन अवयवों की संख्यारूढ हो, तो उनको **रूढअवयव** वा **रूढगुणनखण्ड** कहते हैं।

(८४) १, २, ३, ४ इत्यादि क्रमिक संख्याओं में १, ३, ५, ७ आदि संख्याओं को क्रमिक विषमसंख्या, और २, ४, ६, ८ आदि संख्याओं को क्रमिक समसंख्या कहते हैं। इसलिये जो संख्या २ से पूरी बट जाती है, उसको **समसंख्या,** और जो संख्या २ से पूरी विभाजित नहीं होती, उसको **विषमसंख्या** कहते हैं।

(८५) किसी यौगिक संख्या के रूढगुणनखण्ड निकालने के लिये नीचे दिये हुए सिद्धान्त बहुत उपयोगी होते हैं:—

(१) जिसके एक स्थान का अङ्क शून्य होगा अथवा वह २ से निःशेष

होगा, वह संख्या २ से निःशेष होगी। जैसे, ७४ इसके एक स्थान का अङ्क ४ यह २ से निःशेष होता है इसलिये ७४ यह संख्या भी २ से निःशेष होगी।

(२) जिस संख्या के सब अङ्कों का योग ३ से निःशेष होगा वह संख्या ३ से निःशेष होगी। जैसे, २२१ इस संख्या के सब अङ्कों का योग ६ यह ३ से निःशेष होता है इसलिये उक्त संख्या भी ३ से निःशेष होगी।

(३) जिस संख्या की दाहिनी ओर के दो अङ्कों से बनी हुई संख्या ४ से निःशेष होगी अथवा जिसकी दाहिनी ओर दो शून्य होंगे वह सम्पूर्ण संख्या ४ से निःशेष होगी। इसी तरह जिस संख्या की दाहिनी ओर के तीन अङ्कों से बनी हुई संख्या ८ से निःशेष होगी अथवा जिसकी दाहिनी ओर तीन शून्य होंगे वह सम्पूर्ण संख्या ८ से निःशेष होगी। जैसे, २२४ इस संख्या की दाहिनी ओर के दो अङ्कों से बनी हुई संख्या २४ यह ४ से निःशेष होती है इसलिये उक्त संख्या भी ४ से निःशेष होगी। इसी तरह ५२२४ इसकी दाहिनी ओर के तीन अङ्कों से बनी हुई संख्या २२४ यह ८ से निःशेष होती है इसलिये उक्त संख्या भी ८ से निःशेष होगी।

(४) जिस संख्या के एक स्थान में ० वा ५ होंगे वह संख्या ५ से निःशेष होगी। जैसे, ७०, ९५ यह दोनों संख्याएं ५ से निःशेष होती हैं।

(५) जिस संख्या के सब अङ्कों का योग ९ से निःशेष होगा वह संख्या ९ से निःशेष होगी। जैसे, ८४६ इस संख्या के सब अङ्कों का योग १८ यह ९ से निःशेष होता है इसलिये उक्त संख्या ९ से निःशेष होगी।

(६) जिस संख्या की दाहिनी ओर एक, दो, तीन आदि शून्य होंगे वह संख्या क्रम से १०, १००, १००० आदि संख्याओं से निःशेष होगी। जैसे, ७०, ९०००० यह दोनों संख्याएं क्रम से १० और १०००० से निःशेष होती हैं।

(७) जिस संख्या के, पहिला, तीसरा, पांचवां इत्यादि विषमस्थानों के अङ्कों के योग का और दूसरा, चौथा, छठवां इत्यादि समस्थानों के अङ्कों के योग का अन्तर शून्य होगा, अथवा वह अन्तर ११ से निःशेष होगा तो वह संख्या ११ से निःशेष होगी। जैसे, ६९५७५ इस संख्या के विषम स्थानों के अङ्क ५, ५, ६ इनका योग १६ और समस्थानों के अङ्क ७, ९ इनका योग १६ इन दोनों योगों का अन्तर शून्य है इसलिये उक्त संख्या ११ से निःशेष होगी। इसी प्रकार ५६५२६१४ इस संख्या के विषम स्थानों के अङ्क ४, ६, ५, ५ इनका योग २०

समस्थानों के अङ्क १, २, ६ इनका योग ९ इन दोनों योगों का अन्तर ११ यह ११ से निःशेष होता है, इसलिये उक्त संख्या ११ से निःशेष होगी।

(८) कोई संख्या ७ से ११ से वा १३ से निःशेष होगी वा नहीं इसका निर्णय इस तरह किया जाता हैः—निर्दिष्ट संख्या के अङ्कों को दाहिनी ओर से जहां तक सम्भव हो तीन तीन अङ्कों के समूहों में विभक्त करो। तब पहिला, तीसरा, पांचवां इत्यादि विषमसमूहों के योग का और दूसरा, चौथा इत्यादि समसमूहों के योग का अन्तर यदि शून्य होगा, अथवा वह अन्तर ७ से ११ से वा १३ से निःशेष होगा तो निर्दिष्ट संख्या ७ से ११ से वा १३ से निःशेष होगी। जैसे, २९१४३५७०४ इस संख्या में ७०४, २९१ यह विषमसमूह हैं, इनका योग ९९५ और समसमूह ४३५ यह एक ही है और ९९५, ४३५ इनका अन्तर ५६० यह ७ से ही निःशेष होता है ११ और १३ से निःशेष नहीं होता है इस लिये उक्त संख्या ७ से ही निःशेष होगी। इसी तरह ६४३४५३५८ इस संख्या में विषमसमूह ३५८, ६४ यह दो हैं, इनका योग ४२२ और ३४५ यह समसमूह है, इनका अन्तर ७७ यह ७ और ११ से निःशेष होता है इसलिये उक्त संख्या ७ और ११ से निःशेष होगी।

(९) जिस आठ अङ्कों की संख्या में पहिले चार अङ्क क्रम से उनके आगे के चार अङ्कों के समान होंगे वह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों संख्याओं से निःशेष होगी। जैसे, ७३२१७३२१ इस संख्या में पहिले चार ७३२१ यह अङ्क क्रम से इनके आगे के ७३२१ इन चार अङ्कों के समान हैं इसलिये उक्त संख्या ७३ और १३७ इन दोनों संख्याओं से निःशेष होगी।

(१०) जिस सात अङ्कों की संख्या में पहिले तीन अङ्क क्रम से अन्तिम तीन अङ्कों के तुल्य होंगे और उनके बीच में शून्य होगा वह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी। जैसे, ३७१०३७१ यह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी।

(११) जिस ६ अङ्कों की संख्या में पहिले दो अङ्क क्रम से अन्तिम दो अङ्कों के तुल्य होंगे और उनके बीच में दो शून्य होंगे वह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी। जैसे, ९५००९५ यह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी।

(१२) जिस पांच अङ्कों की संख्या में पहिला अङ्क अन्तिम अङ्क के तुल्य होगा और उनके बीच में तीन शून्य होंगे वह संख्या भी ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी। जैसे, ५०००५ यह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी।

(१३) जिस चार वा पांच अङ्कों की संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या दूनी होगी वह संख्या ६७ से निःशेष होगी। जैसे, ५८२९ इन संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या २९ इससे दूनी शेष अङ्कों की ५८ यह संख्या है, इसलिये उक्त संख्या ६७ से निःशेष होगी। इसी तरह १४६७३ इसमें पहिले दो अङ्कों की संख्या ७३ इससे दूनी शेष अङ्कों की १४६ यह संख्या है, इसलिये उक्त संख्या ६७ से निःशेष होगी।

(१४) जिस संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या तिगुनी होगी, वह संख्या ४३ से निःशेष होगी। जैसे, २४९८३ यह संख्या ४३ से निःशेष होगी।

(१५) जिस संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या पांचगुनी होगी वह संख्या १६७ से निःशेष होगी। जैसे, ७५१५ यह संख्या १६७ इससे निःशेष होगी।

(१६) जिस संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या आठगुनी होगी वह संख्या ८९ इससे निःशेष होगी। जैसे, १०४१२ यह संख्या ८९ इससे निःशेष होगी।

(१७) जिस संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या नौगुनी होगी वह संख्या १७ और ५३ इन दोनों से निःशेष होगी। जैसे, २४३२७ यह संख्या १७ और ५३ इन दोनों से निःशेष होती है।

(१८) जिस संख्या में पहिले तीन अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या दूनी होगी वह संख्या २३ और २९ इन दोनों से निःशेष होगी। जैसे, ६८६३४३ इसमें २३ और २९ इन दोनों का निःशेष भाग दिया जा सकता है।

(८६) किसी अदृढ संख्या के ऐसे दृढ खण्ड किये जा सकते हैं जिनका गुणनफल उस अदृढ संख्या के तुल्य होगा। इसकी विधि—उक्त सिद्धान्तों की सहायता से उस अदृढ संख्या के पहिले ऐसे दो खण्ड करो जिनमें एक खण्ड दृढ होगा। दूसरा खण्ड यदि दृढ न होगा तो उसके भी इसी प्रकार के दो खण्ड

करो। ऐसा तब तक करो जब तक दूसरा खण्ड दृढ न होगा। इस प्रकार जो खण्ड उत्पन्न होंगे उनका गुणनफल उस अदृढ संख्या के तुल्य होगा।

उदाहरण, (१) ६७७८२ इस संख्या के ऐसे खण्ड करो जिनका गुणनफल उक्त संख्या के तुल्य होगा।

यहां उक्त संख्या सम है, इसलिये (१) सिद्धान्त के अनुसार यह २ से निःशेष होगी। इसलिये ६७७८२ = २ × ३३८९१। फिर ३३८९१ इसके सब अङ्कों का योग ३ से निःशेष होता है, इसलिये (२) सिद्धान्त के अनुसार यह ३ से निःशेष होगी, इसलिये ३३८९१ = ३ × ११२९७। फिर ११२९७ इसके विषम स्थानों के अङ्कों के योग का और सम स्थानों के अङ्कों के योग का अन्तर शून्य होता है, इसलिये (७) सिद्धान्त के अनुसार यह ११ से निःशेष होगी, इसलिये ११२९७ = ११ × १०२७। फिर १०२७ इसमें विषम समूह ०२७ और सम समूह १ इनका अन्तर २६ यह १३ से निःशेष होता है, इसलिये (८) सिद्धान्त के अनुसार यह १३ से निःशेष होगी, इसलिये १०२७ = १३ × ७९। यहां दूसरा खण्ड ७९ यह दृढ है, इसलिये उक्त संख्या के ६७७८२ = २ × ३ × ११ × १३ × ७९ यह दृढ खण्ड वा दृढापवर्तक हुए।

इस प्रकार के उदाहरणों को ऊपर के नियम के अनुसार ही करने की आवश्यकता नहीं होती है। दी हुई यौगिक संख्या के जो दो अवयव तुरन्त ज्ञात हो सकें, उनको निकाल कर फिर प्रत्येक अवयव के जितने रूढ अवयव निकल सकेंगे उनको निकालना चाहिये।

उदाहरण (२) २३०४० इस संख्या के रूढ अवयव निकालो।

यहां दी हुई संख्या का १० उत्पादक अवयव है, यह तुरन्त मालूम हो सकता है।

∴ २३०४० = २३०४ × १०

और २३०४ = २५६ × ९

और २५६ = १६ × १६

∴ २३०४० = १० × ९ × १६ × १६

= ५ × २   ३ × ३   २ × २ × २ × २   २ × २ × २ × २

यहां २ नौ बार और ३ दो बार आये हैं, इसलिये

२३०४० = २^{९} × ३^{२} × ५ ऐसा संक्षेप से लिखना अच्छा होता है।

यहां २ और ३ के ऊपर जो क्रम से ९ और २ यह अङ्क हैं, उनको घातमापक कहते हैं। क्योंकि $२^{९}$ यह स्वरूप २ को ९ बार लिख कर उन सब के घात को सूचित करता है। और $२^{९}$ इसको दो का नव घात ऐसा पढते हैं। इसी तरह $३^{२}$ इसको ३ का द्विघात वा ३ का वर्ग और $५^{३}$ इसको पांच का त्रिघात वा पांच का घन ऐसा पढते हैं। और यहां घातमापक अङ्क के नीचे के अङ्क को उस घात का मूल कहते हैं। जैसे, $३^{२} = ३ \times ३ = ९$ और ९ का द्विघातमूल वा वर्गमूल ३ है। इसी तरह $७^{३} = ७ \times ७ \times ७ = ३४३$ और ३४३ का त्रिघातमूल वा घनमूल सात है।

(८७) जिस संख्या का वर्ग दी हुई संख्या से कम होता है, किन्तु उसमें १ जोड़ कर उस योग का वर्ग दी हुई संख्या से अधिक होता है। उस संख्या को दी हुई संख्या का निरग्रमूल कहते हैं। जैसे, ६१ का निरग्र मूल ७ होता है, क्योंकि ७ का वर्ग ४९ यह ६१ से कम है, किन्तु ७ में १ जोड़ कर आठ का वर्ग ६४ यह ६१ से अधिक है, इसलिये ६१ का निरग्रमूल ७ होता है।

रूढसंख्या की पहचान

(८८) जो संख्या अपने निरग्रमूल से छोटी किसी संख्या से पूरी विभाजित नहीं होती है वह रूढ संख्या होती है, अर्थात् १ को छोड़ कर और स्वयं उस संख्या को छोड़ कर अन्य कोई उसका उत्पादक अवयव नहीं हो सकता है। जैसे, ८३ का निरग्रमूल ९ है, और ९ से छोटी किसी संख्या से ८३ यह निःशेष विभाजित नहीं होता, इसलिये ८३ यह रूढ संख्या है।

अपवर्तन के कुछ नियम

(१) **नियम**—यदि कोई संख्या किसी दूसरी संख्या से निःशेष विभाजित होगी, तो उसका कोई अपवर्त्य भी उस दूसरी संख्या से निःशेष होगा। जैसे ८ यह संख्या २ से निःशेष होती है, इसलिये ८ का अपवर्त्य ५६ यह भी २ से निःशेष होगा।

(२) **नियम**—यदि एक संख्या किसी दूसरी संख्या से निःशेष होती हो, और उसकी लब्धि किसी अन्य संख्या से निःशेष होती हो, तो यह दूसरी लब्धि और दूसरी संख्या इन दोनों के गुणनफल से वह पहिली संख्या निःशेष होगी। जैसे, ५६ यह संख्या ७ यह दूसरी संख्या से निःशेष होती है और इसकी लब्धि ८ यह इस अन्य संख्या से निःशेष होती है, इसलिये दूसरी लब्धि २ और दूसरी

सङ्ख्या ७ इनका गुणनफल १४ इससे ५६ यह पहिली सङ्ख्या निःशेष होती है।

(३) नियम—यदि दो संख्याएँ किसी तीसरी संख्या से निःशेषित हों, तो उनका योग और अन्तर भी उस तीसरी संख्या से निःशेषित होगा। जैसे, १५ और २५ यह दो संख्याएँ ५ से निःशेषित होती हैं, तब इनका योग ४० और अन्तर १० ये दोनों ५ से निःशेषित होते हैं।

उदाहरणमाला (१)

नीचे लिखी हुई संख्याएं २, ३, ४, ५, ८, ९, १० और ११ इनमें से कौन संख्याओं से निःशेष होंगी?

(१) १३८ (२) ९४५ (३) ६८४ (४) ४२० (५) ८८४४ (६) ७९४२ (७) १२३० (८) १७७२ (९) २३११ (१०) ३४७५ (११) २३००० (१२) ७०९२८१ (१३) ७७७७७७ (१४) ९८९८९८ (१५) १२३४५६७८९०

निचे लिखो संख्याएं ७, ११, १३ इनमें से किस किस संख्या से निःशेष होंगी?

(१६) ५५५५५५ (१७) ४३३३७८ (१८) ४१२३२१० (१९) ५५७३४५४५ (२०) १२३७८९६६६

नीचेलिखो संख्याएं किनसे निःशेष होंगी?

(२१) १८६९३ (२२) २४६१२३ (२३) १३६१७ (२४) ९५१९ (२५) २७९३१ (२६) १५९५३

नीचे लिखो संख्याओं को उनके दृढापवर्तनों में विभक्त करो

(२७) ६३३३६ (२८) ८७९४५ (२९) १३२९९० (३०) १५३९० (३१) २७६२७६

(३२) २४ और ४२ इनके साधारण गुणनखण्ड कौन हैं?

(३३) नीचे लिखी हुई संख्याओं में कौन रूढ और कौन यौगिक संख्याएं हैं?
५९; १०१; १३७; १४८; १४९; १६३; १८१; १९६; १९७; २२३; २२७;

(३४) दो भिन्न अङ्कों से बनी हुई सबसे छोटी रूढ संख्या कौन है?

(३५) तीन भिन्न अङ्कों से बनी हुई सबसे छोटी और सबसे बड़ी रूढ संख्या कौन है?

(३६) सिद्ध करो कि ६८७ यह रूढ संख्या नहीं है ?

(३७) सिद्ध करो कि ४८७ यह रूढ संख्या है।

(३८) १००० से छोटी सबसे बड़ी संख्या कौन है जो ११ से पूरी बट जाय।

(३९) क्या कोई सम संख्या रूढ संख्या हो सकती है ? यदि हो सकती हो, तो लिखो।

(४) $५^{३}$, $६^{२}$, $७^{३}$, $११^{२}$ $१०^{५}$, इनका क्या अर्थ है ?

महत्तमसमापवर्तक

(८६) दो वा अधिक संख्याओं में से प्रत्येक को पूरी विभाजित करने वाली संख्याओं में सबसे बड़ी जो संख्या होगी, उसको उन दो वा अधिक संख्याओं का **महत्तमसमापवर्तक** कहते हैं।

जैसे, ४८, ७२, १२०, इन संख्याओं में से प्रत्येक को निःशेष विभाजित करने वाली २, ३, ४, ६, ८, १२, २४ यह संख्या हैं। इनमें २४ यह सबसे बड़ी संख्या है इसलिये २४ इस संख्या को ४८, ७२ और १२० इन संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक कहते हैं। महत्तम माने सबसे बड़ा और समापवर्तक माने साधारण गुणनखण्ड, अर्थात् दी हुई संख्याओं के सबसे बड़े साधारण गुणनखण्ड को महत्तमसमापवर्तक कहते हैं।

(९०) जिन दो संख्याओं का १ को छोड़ अन्य कोई साधारण गुणनखण्ड नहीं होता है, वे परस्पर रूढ कही जाती हैं। जैसे, ४ और ९ ये दो संख्याएं यद्यपि स्वयं रूढ नहीं हैं, फिर भी इन दोनों का १ को छोड़ अन्य कोई साधारण अपवर्तक न होने से ये परस्पर रूढ कहलाती हैं।

(९१) जिन दो संख्याओं का कोई साधारण गुणनखण्ड होता है, वे परस्पर अदृढ़ कही जाती हैं। जैसे, २४ और ३० ये दो संख्याएं परस्पर अदृढ़ हैं।

(९२) कोई दो संख्याओं में उनके महत्तमापवर्तक से भाग दो तो लब्धि परस्पर दृढ़ होंगी।

गुणनखण्डों के द्वारा महत्तमसमापवर्तक निकालने की विधि

(९३) जिन संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक निकालना हो उन सबके रूढ गुणनखण्ड अलग निकालो। तब उन सब संख्याओं के साधारण गुणनखण्ड जितने होंगे उनको लिख कर उन सबका जो गुणनफल होगा, वही सब संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक होगा। यदि सब संख्याओं का एक साधारण गुणनखण्ड होगा, तो वही उनका महत्तमसमापवर्तक होगा।

उदाहरण (१) ३६, ४५, ६०, इनका महत्तमसमापवर्तक निकालो।

यहां ३६ = २ × २ × ३ × ३,
४५ = ५ × ३ × ३,
६० = ५ × २ × २ × ३,

यहां सब संख्याओं का साधारण गुणनखण्ड ३ यही केवल है, इसलिये ३ यह उक्त संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक है।

उदाहरण (२) २५२, ३९६, ९२४ इनका महत्तमसमापवर्तक क्या है ?

अथवा, यहाँ २५२ इस एक ही संख्या के रूढ गुणनखण्ड निकाल कर उन गुणनखण्डों में से जिनका ३९६ और ९२४ इन दोनों संख्याओं में निःशेष भाग लगेगा, उन्हीं गुणनखण्डों को लिख कर उनका गुणनफल अभीष्ट महत्तमसमापवर्तक होगा। जैसे २५२ = २ × २ × ३ × ३ × ७, अब ३९६ और ९२४ इन दोनों संख्याओं में २ × २ = ४ और ३ इन गुणनखण्डों का निःशेष भाग लगता है, इसलिये उक्त तीनों संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक ४ × ३ = १२ यह होता है। ऐसा करने से प्रत्येक संख्या के रूढ गुणनखण्ड निकालने की आवश्यकता नहीं होती है।

महत्तमसमापवर्तक निकालने का दूसरा प्रकार

(६४) जब दो संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक निकालना हो, तो उन दो संख्याओं में जो छोटी संख्या होगी उसका बड़ी संख्या में भाग दो। जो शेष बचेगा उसका उसके भाजक में भाग दो। तब जो दूसरा शेष बचेगा उसका फिर उसके भाजक में भाग दो। इसी तरह उद्दिष्ट संख्याओं का परस्पर भाग देने से जिस शेष से उसका भाजक निःशेष होगा, वह उद्दिष्ट संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक होगा। और परस्पर भाग देने से यदि अन्त में १ शेष बचेगा, तो वे दो संख्याएं परस्पर दृढ होंगी।

उदाहरण (३) ६२४ और १४४३ इनका महत्तमसमापवर्तक निकालो।

```
६२४ ) १४४३ ( २
       १२४८
       -----
        १९५ ) ६२४ ( ३
               ५८५
               ----
                ३९ ) १९५ ( ५
                      १९५
                      ---
                       ×
```

यहां उक्त प्रकार से गणित करने पर ३९ शेष से १९५ यह उसका भाजक निःशेष होता है, इसलिये उक्त दो संख्याओं का ३९ यह महत्तमसमापवर्तक है।

तीन वा अधिक संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक निकालने की विधि

(६५) पहिले दो संख्याओं का उक्त प्रकार से महत्तमसमापवर्तक निकालो। फिर यह महत्तमसमापवर्तक और तीसरी संख्या इनका महत्तमसमापवर्तक निकालो। फिर आगे भी यही क्रिया करने से अन्त में जो महत्तमसमापवर्तक होगा वही सब संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक होगा।

उदाहरण (४) १८, ३० और ३९ इनका महत्तमसमापवर्तक क्या है?

```
यहां, १८ ) ३० ( १
           १८
           १२ ) १८ ( १
                १२
                 ६ ) १२ ( २
                     १२
                      ×
```

∴ १८ और ३० का महत्तमसमापवर्तक ६ है, अब ६ और ३९ का महत्तमसमापवर्तक निकालना चाहिये।

```
६ ) ३९ ( ६
    ३६
     ३ ) ६ ( २
         ६
         ×
```

∴ १८, ३० और ३९ इन संख्याओं का ३ यह महत्तमसमापवर्तक है।

उदाहरण (५) वह बड़ी से बड़ी संख्या बताओ, जिससे ५९ और १२२ को भाग दें, तो प्रत्येक दशा में ३ शेष रहे।

यहां वह सबसे बड़ी संख्या निकालनी है, जो ५९ − ३ = ५६ को और १२२ − ३ = ११९ को पूरी विभाजित कर सकेगी, अर्थात् ५६ और ११९ का महत्तमसमापवर्तक हमको निकालना है। और, ५६ = २ × २ × २ × ७ और ११९ = १७ × ७, अतः ५६ और ११९ का महत्तमसमापवर्तक ७ है।

उदाहरण (६) दो अङ्कों की सबसे बड़ी और तीन अङ्कों की सबसे छोटी संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक ३१ है, तो उन संख्याओं को बताओ।

यहां १०० में ३१ का भाग देने से ३ लब्धि और ७ शेष बचता है, अतः

१००—७=९३ यह दो अङ्कों की सबसे बड़ी अभीष्ट संख्या है, और ९३+३१=१२४ यह तीन अङ्कों की सबसे छोटी अभीष्ट संख्या है।

उदाहरणमाला (२)

इनका महत्तमसमापवर्तक निकालो

(१) २४, ७२ (२) २१६, ४७४ (३) ८१६, १०४४ (४) ७६२७१८, ८१४१३१ (५) ३८५७५७२, ४१४३२२३ (६) ४०, ४८, ६० (७) १६५, २३१, ३८५ (८) ५४६, ७१४, १३२६ (९) ३१५, ४९५, ६९३, ११५५ (१०) ३२११, ४९०१, ७१६३

(११) दो संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक निकालने में क्रम से लब्धियां ७, ६ और ९ होती हैं और अन्तिम भाजक १० है, तो उन संख्याओं को बताओ।

[उत्तर निकालने की क्रिया—यहां यह स्पष्ट है कि अन्तिमभाज्य=९ × १०=९०, और द्वितीयभाजक = अन्तिमभाज्य, और द्वितीयलब्धि ६ है, अतः द्वितीय भाज्य = ६ × ९० + १० = ५५०, अब पहिला भाजक = द्वितीय भाज्य = ५५०, और पहिली लब्धि = ७, और पहिला शेष = द्वितीय भाजक = ९०, अतः पहिला भाज्य = ५५० × ७ + ९० = ३९४० अतः ५५० और ३९४० यह अभीष्ट दो संख्या हैं।]

(१२) दो संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक निकालने में २, ३, ४, ५, इस क्रम से लब्धि होती हैं और अन्तिम भाजक ४ है, तो उन संख्याओं को बताओ।

(१३) वह सबसे बड़ी संख्या कौन है, जिसका १५७८ और १४६४६ में भाग दें तो प्रत्येक दशा में ५ शेष रहे।

(१४) एक मनुष्य ने एक स्कूल के लड़कों को २४६ आम समान रूप से बांट दिये, दूसरे दिन उन्हीं लड़कों को उसने ६१५ केले बांट दिये, तब उस स्कूल में कितने लड़के थे?

(१५) ५९५ सेर तेल और ५६१ सेर घी समान आकार के पात्रों में भर कर किसी दूसरे ग्राम में भेजना है, तो कम से कम कितने पात्रों की जरूरत होगी?

(१६) ५०० इस संख्या के समीप की दो ऐसी संख्या बताओ जिनका महत्तमसमापवर्तक १९ है।

(१७) एक खेत ३२३ हाथ लम्बा और २२१ हाथ चौड़ा है, उसकी लम्बाई और चौड़ाई पूरी पूरी नापने के लिये एक बहुत बड़ी जंजीर बनवाना है, तो उस जंजीर की लम्बाई कितने हाथ होनी चाहिये ?

(१८) एक २ मन ३७ सेर की गेहूँ की ढेरी है और दूसरी में १४ मन ३८ सेर चना है, तो उनको पूरा पूरा नापने के लिये बड़ी से बड़ी कितने सेर की टोकरी हो सकती है ?

(१९) एक मजदूर कुछ दिन के लिये १३ रु० २ आ० में एक काम करने को रखा गया, वह कुछ दिन तक गैर हाजिर रहा, जिससे उसको सिर्फ ४ रु० ४ आ० ३ पा० मिले, तब यह सिद्ध करो कि उसकी प्रति दिन की मजदूरी ५ आ० ३ पा० से अधिक नहीं हो सकती है।

(२०) एक मनुष्य ने कुछ आम १ रु० ११ आ० ४ पा० में मोल लिये, और उनमें से कुछ १ रु० ४ आ० ८ पा० में बेच दिये, तब उसके पास बचे हुए आमों की कम से कम क्या संख्या हो सकती है ?

लघुतमसमापवर्त्य

(६६) दो वा अधिक संख्याओं में से प्रत्येक संख्या जितनी संख्याओं को पूरी विभाजित करती है उतनी संख्याएँ उन दो वा अधिक संख्याओं के साधारण अपवर्त्य कहे जाते हैं। और उन अपवर्त्यों में सबसे छोटा जो अपवर्त्य होगा वही लघुतम अर्थात् सबसे छोटा समापवर्त्य कहा जाता है। जैसे, २, ३, ४ इन संख्याओं के १२, २४, ३६ इत्यादि साधारण अपवर्त्य हैं, इनमें १२ यह सबसे छोटा अपवर्त्य होने से २, ३, ४ इन संख्याओं का १२ यह लघुतमसमापवर्त्य है।

(६७) कोई दो संख्याओं का उनके लघुतमसमापवर्त्य में भाग दो तो लब्धि परस्पर दृढ़ होंगी।

(६८) जो दो संख्याएं परस्पर दृढ होती हैं उनका गुणनफल ही उन संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य होता है। जैसे, ७ और ४ इन परस्पर दृढ संख्याओं का लघुतम-समापवर्त्य ७ × ४ = २८ होता है।

और जो अनेक संख्याएँ ऐसी हों जिनमें की कोई दो संख्याएँ परस्पर अदृढ़ न हों तो उनका भी गुणनफल उन संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य होता है। जैसे, ४, ७, ११, १५ इन चार संख्याओं में कोई दो संख्याएँ परस्पर अदृढ नहीं हैं, इसलिये ४ × ७ × ११ × १५ = ४६२० यही उक्त संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य है।

लघुतमसमापवर्त्य निकालने का पहिला प्रकार

(९९) दो संख्याओं के गुणनफल में उन दो संख्याओं के महत्तमसमापवर्तक का भाग दो तो लब्धि उन दो संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य होगी। जैसे, ९ और १२ का लघुतमसमापवर्त्य निकालना है तो ९ और १२ का महत्तमसमापवर्तक ३ है, अतः १२ × ९ ÷ ३ = १०८ ÷ ३ = ३६ यह ९ और १२ का लघुतमसमापवर्त्य है।

(१००) यदि दो से अधिक संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य जानना हो तो पहिले उक्त प्रकार से दो संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य निकालो। फिर इस लघुतमसमापवर्त्य और तीसरी संख्या का लघुतमसमापवर्त्य निकालो। इसी प्रकार अन्त तक करने पर अन्त में जो लघुतमसमापवर्त्य होगा वही अभीष्ट लघुतमसमापवर्त्य होगा। जैसे, ६, २०, २५, इनका लघुतमसमापवर्त्य निकालना है तब, पहिले ६ और २० का महत्तमसमापवर्तक २ है, अतः ६ × २० ÷ २ = ६० यह ६ और २० का लघुतमसमापवर्त्य हुआ, अब ६० और २५ का महत्तमसमापवर्तक ५ है, अतः २५ × ६० ÷ ५ = १५०० ÷ ५ = ३०० यह उक्त संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य है।

नोट—इससे यह नियम बनता है कि दो संख्याओं का गुणनफल उनके महत्तमसमापवर्तक और लघुतमसमापवर्त्य के गुणनफल के समान होता है। और उन दो संख्याओं के गुणनफल में उनके लघुतमसमापवर्त्य का भाग दें तो लब्धि उन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तक होगी।

लघुतमसमापवर्त्य निकालने का दूसरा प्रकार

(१०१) दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक के रूढ गुणनखण्ड निकालो। तब उनमें एक ही बार आने वाले जितने गुणनखण्ड होंगे उनको लिखो। और यदि कई बार आने वाले गुणनखण्ड हों तो अधिक से अधिक जितनी बार वे किसी संख्या में आयें हों उतनी बार उनको लिखो। फिर इन सबका गुणनफल अभीष्ट लघुतमसमापवर्त्य होगा।

उदाहरण—(१) ४०, ६०, ८०, इनका गुणनखण्डों द्वारा लघुतमसमापवर्त्य निकालो।

४० = २ × २ × २ × ५,	यहां एक ही बार आये हुए गुणनखण्ड
६० = २ × २ × ३ × ५,	३ और ५ हैं, और २ अधिक से अधिक
८० = २ × २ × २ × २ × ५,	४ बार तीसरी संख्या में आये हैं, अतः यही
२ × २ × २ × २ × ३ × ५ = २४०	उक्त संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य है।

लघुतमसमापवर्त्य निकालने का तीसरा प्रकार

(१०२) उद्दिष्ट संख्याओं को एक आडे पङ्क्ति में क्रम से लिखो। फिर देखो कि २, ३, ५, ७, इत्यादि रूढ संख्याओं में से किस रूढ संख्या से पङ्क्ति की दो वा अधिक संख्या निःशेष होती हैं, उस रूढ संख्या को पङ्क्ति की बांई ओर भाजक के स्थान में लिखो। और उससे पङ्क्ति की जो जो संख्या निःशेष होगी उसमें भाग देकर लब्धि को उस उस संख्या के नीचे लिखो। और जो संख्या उस दृढ संख्या से निःशेष न होगी उसको भी उस संख्या के नीचे रखो। इस तरह पहली पङ्क्ति के नीचे एक दूसरी पङ्क्ति बनेगी। उसमें भी फिर इसी प्रकार की क्रिया करो। ऐसा बार बार तब तक करो जब तक अन्त की पङ्क्ति में ऐसी सब संख्याएँ हो जाय जिनमें कोई दो संख्या परस्पर अदृढ न रहें। तब वे भाजकरूप दृढ संख्याएँ और अन्त की पङ्क्ति की सब संख्याएँ इन सबका जो गुणनफल होगा वही उन उद्दिष्ट सङ्ख्यओं का लघुतमसमापवर्त्य होगा। छोटी छोटी अनेक संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य इसी प्रकार से निकालने में लाघव होता है।

उदाहरण (२) १२, १५, १६, १८, इनका लघुतमसमापवर्त्य निकालो।

२) १२, १५, १६, १८।
२) ६, १५, ८, ९।
३) ३, १५, ४, ९।
१, ५, ४, ३।

इसलिये २ × २ × ३ × ५ × ४ × ३ = ७२० यह उद्दिष्ट संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य है।

उदाहरण (३) २ से लेकर १० तक की क्रमिक संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य क्या है ?

यहां २) २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०।
२) १, ३, २, ५, ३, ७, ४, ९, ५।
३) १, ३, १, ५, ३, ७, २, ९, ५।
५) १, १, १, ५, १, ७, २, ३, ५।
१, १, १, १, १, ७, २, ३, १।

∴ २ × २ × ३ × ५ × ७ × २ × ३ = २५२० यह उक्त संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य है।

अथवा उक्त संख्याओं में जो जो संख्या किसी अन्य संख्या का अपवर्तक होगी उस उस संख्या को निकाल दो। और शेष संख्याओं का उक्त प्रकार से लघुतमसमापवर्त्य निकालो तो वही उक्त सब संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य होगा। इससे क्रिया में बहुत लाघव होगा। जैसे, ऊपर के उदाहरण में २, ३, ४, ५ यह चार संख्याएँ ६, ८ और १० के अपवर्तक हैं, इसलिये २, ३, ४, ५ इन संख्याओं को हटा कर शेष ६, ७, ८, ९, १० इन संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य भी अभीष्ट लघुतमसमापवर्त्य होता है। जैसे,

२) ६, ७, ८, ९ १०।
 ३, ७, ४, ९ ५।

∴ २ × ७ × ४ × ९ × ५ = यह अभीष्ट लघुतमसमापवर्त्य है।

यहां ९ के अपवर्तक ३ को हटा दिया है।

नोट—यहां प्रत्येक पंक्ति को रूढसंख्या से ही भागना चाहिये। यौगिकसंख्या से भाग देने पर कभी कभी अशुद्ध उत्तर आता है। जैसे नीचे के उदाहरण में १० इस यौगिकसंख्या का भाग देने से उत्तर अशुद्ध आता है।

उदाहरण—(४) २०, २५, ५० इनका लघुतमसमापवर्त्य क्या है?

शुद्ध क्रिया	अशुद्ध क्रिया
२) २०, २५, ५०।	१०) २०, २५, ५०।
५) १०, २५, २५।	५) २, २५, ५।
५) २, ५, ५।	२, ५, १।
२, १, १।	∴ अशुद्ध उत्तर = १० × ५ × २ × ५ = ५००,

∴ शुद्ध उत्तर = २ × ५ × ५ × २ = १००,

उदाहरण—(५) एक फल बेचनेवाले के टोकरी में कुछ फल थे। जब वह उनमें से चार चार, पांच पांच, छ छ, सात सात वा आठ आठ फल गिनता था तब एक ही फल शेष रहता था। तब कहो उसकी टोकरी में कितने फल थे?

यहां ४, ५, ६, ७ और ८ इनका लघुतमसमापवर्त्य ८४० है, अतः ८४० + १ = ८४१ इसमें ४, ५, ६, ७, ८, इन संख्याओं का अलग अलग भाग देने से १ ही शेष बचेगा, इसलिये उस टोकरी में ८४१ फल थे।

उदाहरण—(६) वह छोटी से छोटी कौन संख्या है, जिसको २, ३, ४ और ५ से विभाजित करने से शेष क्रम से १, २, ३ और ४ आते हैं।

यहां प्रत्येक शेष अपने भाजक से १ कम है, अर्थात् उस संख्या में १ जोड़ा जाय तो वह संख्या अपने भाजकों से पूरी विभाजित होगी, अतः वह संख्या २, ३, ४, व ५ के लघुतमसमापवर्त्य से १ कम है, अर्थात् अभीष्ट संख्या = ६० - १ = ५९

उदाहरण—(७) १२, १६ और १८ इनमें प्रत्येक से पूरी विभाजित होने वाली तीन अङ्कों की सबसे बड़ी संख्या कौन है ?

१२, १६ और १८ इनमें प्रत्येक से पूरी विभाजित होने वाली सबसे छोटी संख्या १२, १६ और १८ इनका लघुतमसमापवर्त्य होना चाहिये, और उक्त संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य १४४ है, जिसको किसी संख्या से गुण देने पर भी गुणनफल १२, १६ और १८ इनमें से प्रत्येक से पूरा विभाजित होगा। अब तीन अङ्कों की सबसे बड़ी संख्या ९९९ यह है, और इसके समीप की संख्या १४४ × ६ = ८६४ यह है, अतः ८६४ यह उत्तर है।

उदाहरणमाला (३)

नीचे लिखी हुई संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य निकालो

(१) ३६, ९९ (२) ७८९१, १३१६१ (३) २०, २४, ३० (४) ९०, १३५, १५० (५) १२०, १४४, १८०, २४०, ३६० (६) ६, १४, २१, २२, ३३, ७७ (७) १२५, १७५, २२५, २५, ३४, ५१, १५ (८) २५०, ३६०, ४९, ७०० (९) २१, २२, २३, २४, २५, २६, २७, २८, २९, ३० (१०) १८०१८, ३७०३७, ५१२८२, ६०६०६, ९५२३८

(११) जिन दो संख्याओं का गुणनफल १७६४ और महत्तमसमापवर्तक ७ है, उनका लघुतमसमापवर्त्य क्या है ?

(१२) जिन दो संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक २१ और लघुतमसमापवर्त्य ४२० है और उन दो संख्याओं में एक संख्या ८४ है, तो दूसरी संख्या को बताओ।

(१३) १३, १५, १७ और १९ इन चार संख्याओं से जितनी संख्याएं निःशेष होंगी उनमें सबसे छोटी संख्या क्या है ?

(१४) वह संख्या कौन है ? जिसमें ५, ६, ७, ८ और ९ इन संख्याओं का अलग-अलग भाग देने से प्रत्येक दशा में ३ शेष रहता है।

(१५) वह कौन संख्या है ? जिसमें ६, ५, ४ और ३ इनका अलग-अलग भाग देने पर क्रम से ४, ३, २ और १ शेष रहता है।

(१६) ५, ७ और २६ इनमें प्रत्येक से पूरी बट जाने वाली चार अङ्कों की सबसे छोटी संख्या कौन है ?

(१७) १००० और १५०० इन दो संख्याओं के बीच में ४, ५, ९, १२ और १५ इनके साधारण अपवर्त्य कौन हो सकते हैं ?

(१८) वह सबसे छोटी संख्या कौन है ? जिसमें ४ घटाने से जो शेष बचता है वह ४८, ६४ और ७२ इनमें से प्रत्येक से पूरा विभाजित होता है।

(१९) वह सबसे छोटी संख्या कौन है ? जिसमें २५ का भाग देने से २५ शेष बचता है, ४५ का भाग देने से ३५ शेष और ५५ का भाग देने से ४५ शेष बचता है।

(२०) पांच मनुष्यों को एक मन्दिर की प्रदक्षिणा करने में क्रम से ४, ३, ६, ९ और ८ मिनट लगते हैं, उन सबोने एक ही समय एक ही स्थान से प्रदक्षिणा करना शुरू किया, तब बताओ उसी स्थान पर कितने समय के बाद वे सब पहिली बार मिलेंगे ?

(२१) पांच घंटे क्रम से ३, ५, ६, ८ और ११ सेकण्ड के अन्तर से बजते हैं, एक बार एक साथ बजने पर तीसरी बार वे सब एक साथ कितने समय में बजेंगे ?

(२२) एक सायकिल के दोनों पहियों के घेरे क्रम से ७ फी० २ इञ्च और १० फी० ९ इञ्च हैं, तब उन पहियों में से प्रत्येक के कम से कम और पूरे पूरे चक्कर होने तक वह सायकिल कितने दूर जायगी ?

(२३) ७६४८, १३३८४ और ६३०९६ इनका गुणनखण्ड द्वारा महत्तम-समापवर्तक और लघुतमसमापवर्त्य निकालो।

(२४) एक घंटी २ मिनट में ६ बार बजती है, दूसरी ५ मिनट में ९ बार, तीसरी ३ मिनट में १५ बार और चौथी ४ मिनट में २१ बार बजती है, वे सब एक बार एक साथ बजने पर फिर एक साथ कब बजेंगी ?

(२५) दो संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य उनके महत्तमसमापवर्तक से २८ गुना है, और महत्तमसमापवर्तक और लघुतमसमापवर्त्य इनका योग १७४० है, और उन दो संख्याओं में एक संख्या २४० है तो दूसरी संख्या क्या है ?

भिन्नसंख्याव्युत्पादन

(१०३) यहां तक **अभिन्नसंख्या** का अर्थात् पूरी इकाई से बनी हुई अथवा इकाइओं के समूह से बनी हुई संख्या का गणित दिखलाया जा चुका है अब भिन्न संख्या का निरूपण किया जाता है।

किसी पदार्थ के वा इकाई के समान भाग करके उनमें से एक वा अधिक भागों को सूचित करने वाली संख्या को **भिन्नसंख्या** कहते हैं। इससे यह स्पष्ट मालूम पड़ता है कि कोई भिन्नसंख्या दो संख्याओं द्वारा प्रकट की जाती है। जिनमें पदार्थ के समान भागों को सूचित करने वाली एक संख्या और दूसरी उन समान भागों में से एक वा अधिक भागों को सूचित करने वाली संख्या होती है।

(१०४) किसी भिन्न संख्या को लिखने में किसी पदार्थ के वा इकाई के समान भागों में से एक वा अधिक भागों को सूचित करने वाली संख्या को पहिले लिख कर उसके नीचे एक आडी रेखा करते हैं और उस रेखा के नीचे पदार्थ वा इकाई के समान भागों को सूचित करने वाली संख्या लिखते हैं। यहाँ रेखा के ऊपर की संख्या को **अंश** और नीचे की संख्या को छेद वा हर कहते हैं।

जैसे, किसी पदार्थ वा इकाई के ५ समान भाग करके उनमें से ३ भागों को दिखलाना अभीष्ट हो तो $\frac{३}{५}$ इस तरह ३ को रेखा के ऊपर लिख कर उसके नीचे ५ को लिखते हैं और यहां ऊपर के ३ को अंश और नीचे के ५ को छेद कहते हैं।

(१०५) किसी भिन्न संख्या को पढ़ने में पहिले अंश स्थान की संख्या का उच्चारण करके तब तुरन्त छेद की संख्या के आगे अंश शब्द लगा कर उसका उच्चारण किया जाता है। जैसे, $\frac{३}{५}$ को तीन पञ्चमांश, $\frac{७}{१०}$ को सात दशांश, $\frac{९}{१६}$ को नौ षोडशांश, इस तरह पढ़ते हैं। अथवा इन भिन्न संख्याओं को क्रम से तीन बटे पांच, सात बटे दस, नौ बटे सोलह, इस तरह भी पढ़ते हैं।

(१०६) भिन्न संख्या के छेद की जो संख्या होती है उतने किसी पदार्थ वा इकाई के समान भाग करके उनमें से अंश की संख्या के इतने भागों का मान वही होता है जो छेद की संख्या के इतने अंश की संख्या के समान भाग कर के उनमें से एक भाग का मान होता है। जैसे, $\frac{३}{८}$ रुपया अर्थात् यहां रुपया इस परिमाण के ८ समान भाग करने से १ भाग का मान १ दोअन्नी होता है, ऐसे तीन भागों का मान ३ दोअन्नियां = ६ आने, यह $\frac{३}{८}$ रुपये का मान है। अब ३ रुपये के ८ समान भाग करो, यहां ३ में ८ का भाग नहीं लगता इस लिये ३ रु० के आने बनाये, तब ३ रु × १६ = ४८ आ० इसमें ८ का भाग देने से लब्धि ६ आ० यह एक भाग का मान पूर्वोक्त मान के तुल्य ही होता है। इससे यह स्पष्ट प्रतीत होता है कि, किसी भिन्न संख्या का अंश भाज्य और छेद भाजक होता है और जो लब्धि होती है वही भिन्न संख्या है। यहां भाजक से भाज्य

निःशेष नहीं होता है इस लिये वह अपूर्ण लब्धि होने से भिन्न संख्या को अ
संख्या भी कहते हैं।

(१०७) जब कि भिन्न संख्या भाज्य भाजकों द्वारा प्रकट की जाती है
हम किसी अभिन्न संख्या को भी भाज्य भाजकों द्वारा भिन्न संख्या में प्रकट
सकते हैं। जैसे, $१४ = \frac{१४}{१} = \frac{२८}{२} = \frac{४२}{३}$ इत्यादि। यहां १४,२८,४२ में क्र
से १, २, ३ का भाग देने से १४ यही लब्धि आती है।

(१०८) जब भिन्न संख्या का अंश छेद से छोटा होता है तब उसका म
१ से कम होता है, तब छेद के बराबर अंश होता है तब उसका मान १ के सम
होता है और जब छेद से अंश बड़ा होता है तब उसका मान १ से बड़ा होता है

(१०९) भिन्न संख्या के अंश और छेद को किसी एक ही संख्या से गु
दो या भाग दो तो भी उसका मान नहीं बदलता। जैसे, $\frac{५}{८}$ रु० $= \frac{५\times२}{८\times२} = \frac{१०}{१६}$ रु
क्योंकि १ रुपये के आठ भागों में से ५ भागों का मान ५ दोअन्नियां = १० आ
होते हैं, यही मान १ रुपये के १६ भाग कर के उनमें से १० भागों का होता है
इसी तरह $\frac{३२}{६४}$ रु० $= \frac{३२\div१६}{६४\div१६} = \frac{२}{४}$ रु०, यहां १ रुपये के ६४ भाग कर के उन
से ३२ भागों का मान ३२ पैसे = ८ आने होते है, और १ रुपये के ४ भागों में
२ भागों का मान भी २ चौअन्नियां = ८ आने होते हैं।

(११०) भिन्न संख्या को किसी अभिन्न संख्या से गुण देना हो तो उ
भिन्न संख्या के अंश को उस अभिन्न संख्या से गुण देने से जो गुणनफल होगा व
अभीष्ट गुणनफल होता है। और यदि उस भिन्न संख्या का छेद उस अभि
संख्या से निःशेष होता हो तो उस अभिन्न संख्या का छेद में भाग दो तो
अभीष्ट गुणनफल होता है। जैसे, $\frac{५}{७} \times ३ = \frac{५\times३}{७} = \frac{१५}{७}$ = अभीष्ट गुणन फ
और $\frac{५}{२१} \times ३ = \frac{५}{२१\div३} = \frac{५}{७}$ यही अभीष्ट गुणनफल होता है।

(१११) भिन्न संख्या में किसी अभिन्न संख्या का भाग देना हो तो ल
के लिये उस भिन्न संख्या के छेद को उस अभिन्न संख्या से गुण दो। और य
उस भिन्न संख्या का अंश उस अभिन्न संख्या से निःशेष होता हो तो ल
के लिये उस अंश में उस अभिन्न संख्या का भाग दो तो अभीष्ट लब्धि होगी
जैसे, $\frac{५}{७} \div ३ = \frac{५}{७\times३} = \frac{५}{२१}$ = अभीष्ट लब्धि, और $\frac{१५}{७} \div ३ = \frac{१५\div३}{७}$ =
यही अभीष्ट लब्धि है।

उदाहरण (१) एक रुपये के $\frac{३}{४}$ का क्या मान है ?

यहां एक रुपये के ४ भागों में से ३ भाग लिये गये हैं, १ रुपये के ४ भागों में से १ भाग का मान १ चौअन्नी होता है, इस लिये ३ भाग = ३ चौअन्नी= १२ आने के होंगे। अतः एक रुपये का $\frac{३}{४}$ = १२ आने। यहां १२ आने १ रुपये की कौन भिन्न है ?

ऐसे प्रश्न का उत्तर $\frac{३}{४}$ भिन्न, यह होता है।

उदाहरण (२) १४ के $\frac{६}{७}$ का क्या अर्थ है ?

यहां १४ के ७ भाग करके ६ भाग लिये गये हैं और हर एक भाग = १४ ÷ ७ = २ है, अतः ६ भाग = १२, इस लिये १४ के $\frac{६}{७}$ = १२, यहां १२ को १४ की $\frac{६}{७}$ भिन्न कहते हैं।

उदाहरण (३) १ घण्टा ६ मि० के $\frac{३}{११}$ का क्या मान है ?

यहां १ घण्टा ६ मि० के मिनट बनाये तो ६६ मिनट हुए, अब ६६ मि० के ११ समान भाग करने से १ भाग ६ मिनट के तुल्य होता है, ऐसे ३ भाग = ६ × ३ मिनट=१८ मिनट, अतः १८ मिनट, १ घण्टा ६ मिनट का $\frac{३}{११}$वा भाग है।

उदाहरण (४) ७ सेर को १ मन के भिन्न में परिवर्तित करो।

यहां १ सेर १ मन का चालीसवा भाग है, ऐसे ७ भागों को १ मन के भिन्न में प्रकट करना है, इस लिये ७ सेर= $\frac{१}{४०}$ × ७ = $\frac{१ \times ७}{४०}$ = $\frac{७}{४०}$ उत्तर

उदाहरणमाला (४)

अङ्कों में लिखो

(१) तीन चतुर्थांश, सात दशांश, तेरह बटे साठ, उन्नीस बटे एक सौ तिरपन, दो सौ चालीस बटे तीन सौ इक्यावन।

शब्दों में लिखो

(२) $\frac{६}{११}$, $\frac{१८}{३१}$, $\frac{१११}{२३५}$, $\frac{३८९}{९७७}$, $\frac{१२३५}{९८७६}$

(३) ११, १२, १३, १४, १५, इन अभिन्न संख्याओं को भिन्नसंख्याओं में प्रकट करो।

(४) ३० सेर १ मन की कौन सी भिन्न है ?

इनका मान क्या है ?

(५) ६ रु० का $\frac{७}{८}$ (६) ३ मन का $\frac{५}{६}$ (७) २ तोला ३ माशा का $\frac{४}{९}$ (८) ३ गज १ फूट का $\frac{९}{१०}$ (९) १ मील का $\frac{५}{८}$ (१०) ३५ का $\frac{५}{७}$

भिन्न में परिवर्तित करो

(११) ९ घण्टे को १ दिन के (१२) ११ सेर को १ मन
(१३) १९ को ३७ के (१४) वह कौन सा मन है जिसका सातवा भा
११ आ० है ?

(१५) $\frac{३}{८}$ रु० प्रति पुस्तक के हिसाब से १६ पुस्तक का दाम बताओ।

(१६) $\frac{३}{३२}$ को ८ से और $\frac{११}{६०}$ को ३, ४, ६, १२, १५ और २० से अल अलग गुण कर गुणनफलों को कहो।

(१७) $\frac{५}{१७}$ में ७ का और $\frac{६०}{८३}$ में २, ३, ४, ५ और ६ का अलग अल भाग देकर लब्धियों को कहो।

(११२) अब भिन्नसंख्या के स्वरूप भेद से उसकी जो विशेष संज्ञाएँ होती उनको कहते हैं।

(१) जिस भिन्नसंख्या का अंश छेद से छोटा होता है उसको **समभिन्न संख्या** कहते हैं। जैसे, $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{५}{७}$ इत्यादि।

(२) जिस भिन्नसंख्या का अंश छेद से बड़ा होता है उसको **विषमभिन्न संख्या** कहते हैं। जैसे, $\frac{७}{४}$, $\frac{१४}{९}$ इत्यादि।

(३) जिस भिन्नसंख्या में अभिन्नसंख्या और भिन्नसंख्या दोनों सम्मिलि रहती हैं उसको **संयुक्तभिन्न** कहते हैं। जैसे, $३+\frac{३}{४}$, $१०+\frac{१}{२}$ इत्यादि और इसको तीन पूर्णांक तीन चतुर्थांश, दस पूर्णांक एक द्वितीयांश, इस तरह अथवा तीन सही तीन बटे चार, दस सही एक बटे दो इस तरह भी पढते हैं और यहां बीच में + इस धन चिन्ह को न लिख कर केवल $३\frac{३}{४}$, $१०\frac{१}{२}$ ऐस लिखते हैं।

(४) जिस भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों की अभिन्न संख्या होती है उसको **भागजातिभिन्न** कहते हैं। जैसे, $\frac{३}{५}$, $\frac{१४}{१५}$ इत्यादि।

(५) जिस भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों की वा दो में से किसी एक की भिन्नसंख्या होती है उसको **मिश्रभिन्न** कहते हैं। जैसे,

$$\frac{\frac{२}{३}}{\frac{३}{४}},\ \frac{\frac{१}{२}}{३},\ \frac{३}{\frac{७}{८}},\ \frac{२\frac{१}{३}}{४},\ \frac{५}{२\frac{१}{८}}\ \frac{३\frac{३}{४}}{५\frac{१}{७}}$$ इत्यादि।

(६) जिस भिन्नसंख्या में भाग के भाग होते हैं उसको **प्रभागजातिभिन्न** कहते हैं। जैसे, $\frac{३}{४}$ का $\frac{५}{७}$, $\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{५}$ का $\frac{७}{१०}$ इत्यादि।

(७) किसी भिन्नसंख्या के अंश के स्थान में छेद को और छेद के स्थान में अंश को लिखने से जो दूसरी भिन्नसंख्या होगी उसको उस मूल भिन्नसंख्या की व्युत्क्रमभिन्न कहते हैं। जैसे, $\frac{२}{५}$ का $\frac{५}{२}$ यह व्युत्क्रमभिन्न होती है।

भिन्नसंख्या का रूपान्तर

(११३) भिन्नसंख्या को, उसके मान में कुछ परिवर्तन हुए विना, दूसरी भिन्नसंख्या के रूप में परिवर्तित करने के प्रकार नीचे दिये जाते हैं:—

१ ला प्रकार—किसी अभिन्नसंख्या को, उसके मान में कुछ परिवर्तन हुए बिना, ऐसी भिन्नसंख्या में परिवर्तित कर सकते हैं जिसका छेद इष्ट संख्या के समान होता है।

नियम १—अभिन्नसंख्या को उस इष्ट संख्या से गुण दो जिसका छेद के स्थान में होना अभीष्ट हो, और गुणनफल को अंशस्थान में रखो और उस इष्ट संख्या को छेद के स्थान में रखो।

उदाहरण (१) १२ इस अभिन्नसंख्या को ऐसी भिन्न का रूप दो जिसका छेद १३ होगा।

यहां $१२ = \frac{१२}{१}$ और $\frac{१२}{१} = \frac{१२ \times १३}{१ \times १३} = \frac{१५६}{१३}$, $\therefore \frac{१५६}{१३}$ यह १२ इस अभिन्नसंख्या को दिया हुआ अभीष्ट भिन्न का रूप है।

दी हुई भिन्नसंख्या को ऐसी भिन्न के रूप में ला सकते हैं जिसका छेद दी हुई भिन्नसंख्या के छेद का कोई अपवर्त्य होता है।

नियम २—दी हुई भिन्नसंख्या के छेद का उस अभीष्ट अपवर्त्य में भाग दो जो लब्धि होगी उससे दी हुई भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों को गुण दो।

उदाहरण (२) $\frac{७}{१२}$ इसको ऐसी भिन्न में परिवर्तित करो जिसका हर ९६ होगा।

यहां ९६ यह १२ का अपवर्त्य है अतः $९६ \div १२ = ८$ इससे $\frac{७}{१२}$ इसके अंश और छेद दोनों को गुण देने से $\frac{७ \times ८}{१२ \times ८} = \frac{५६}{९६}$ यह अभीष्ट भिन्न होती है।

दी हुई भिन्नसंख्या को ऐसी भिन्न में बदल सकते हैं जिसका छेद दी हुई भिन्नसंख्या के छेद का कोई गुणनखण्ड होता है। परन्तु यह तभी हो सकता है जब उस गुणनखण्ड का दी हुई भिन्नसंख्या के छेद में भाग देने से जो लब्धि होगी उससे उस भिन्नसंख्या का अंश भी पूरा विभाजित हो सकता है।

नियम ३—दी हुई भिन्नसंख्या के छेद में उस अभीष्ट गुणनखण्ड का भाग दो जो लब्धि होगी उससे उस भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों में भाग दो।

उदाहरण (३) $\frac{६५}{११७}$ इसको ऐसी भिन्न में रूपान्तरित करो जिसका छेद ९ होगा।

यहां ९ का ११७ में भाग देने से लब्धि १३ इसका ६५ इस अंश में निःशेष भाग लगता है अतः अंश और छेद दोनों में १३ का भाग देने से $\frac{६५}{११७} = \frac{६५ \div १३}{११७ \div १३} = \frac{५}{९}$ यही अभीष्ट भिन्न है।

उदाहरणमाला (५)

(१) ५, ६, ११ और १७ इनमें से प्रत्येक को ऐसी भिन्न में लाओ जिसका छेद २१ है।

(२) १२ को ऐसी भिन्नों का रूप दो जिनके छेद ५, ८, १४ और १९ हों।

(३) $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$ और $\frac{५}{६}$ इनमें से प्रत्येक का १२, ६०, ७२ और ३०० छेद वाली भिन्नों में रूपान्तर करो।

(४) $\frac{३९}{९१}$, $\frac{६३}{९०}$, $\frac{८}{६४}$ और $\frac{१५}{५४}$ इनको ऐसी भिन्नों में बदल दो जिनके छेद क्रम से ७, १०, १६ और १८ हों।

(५) $\frac{३०}{४८}$, $\frac{२१}{५६}$, $\frac{३३}{८८}$ और $\frac{७२}{१४४}$ इनमें से प्रत्येक को ८ छेद वाली भिन्न में परिवर्तित करो।

२ रा प्रकार—दिये हुए संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न में परिवर्तित कर सकते हैं।

नियम—दिये हुए संयुक्तभिन्न की अभिन्न संख्या को भिन्न संख्या के छेद से गुण दो और गुणनफल में उस भिन्नसंख्या का अंश जोड़ दो। और योगफल को अंश के स्थान में लिखो और उस भिन्न के छेद को ही छेद के स्थान में लिखो।

उदाहरण, $५\frac{२}{३}$ इस संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न का रूप दो।

यहां $५\frac{२}{३} = \frac{५ \times ३ + २}{३} = \frac{१५ + २}{३} = \frac{१७}{३}$,

उदाहरणमाला (६)

नीचे दी हुई संयुक्त भिन्नों को विषम भिन्नों में परिवर्तित करो

(१) $३\frac{१}{४}$ (२) $६\frac{१}{३}$ (३) $७\frac{२}{३}$ (४) $६\frac{५}{८}$ (५) $९\frac{६}{७}$ (६) $१६\frac{१७}{१८}$
(७) $२०\frac{२१}{२३}$ (८) $१२\frac{३}{८}$ (९) $१९\frac{२}{३}$ (१०) $२६\frac{३}{४}$ (११) $५५\frac{१७}{५६}$
(१२) $२४\frac{३३}{११२}$ (१३) $११८\frac{११}{३९५}$ (१४) $३९८\frac{४}{११५}$ (१५) $४९८\frac{३९९}{८९५}$

३ रा प्रकार—विषमभिन्न को संयुक्तभिन्न में परिवर्तित कर सकते हैं।

नियम—दी हुई विषमभिन्न के अंश में छेद का भाग दो। लब्धि को संयुक्तभिन्न की अभिन्नसंख्या के स्थान में लिखो और उसके आगे शेष को अंश के स्थान में लिख कर छेद के स्थान में दी हुई विषमभिन्न के छेद को लिखने से विषमभिन्न का संयुक्तभिन्न में परिवर्तन होता है। यहां भाग देने पर शेष कुछ न बचेगा तो उस विषमभिन्न का संयुक्तभिन्न में परिवर्तन न हो सकेगा, किन्तु अभिन्नसंख्या में ही उसका परिवर्तन होगा।

उदाहरण, $\frac{१९}{४}$ इस विषमभिन्न को संयुक्तभिन्न का रूप दो।

यहां १९ ÷ ४ = ४ लब्धि और शेष ३,

$\therefore \quad \frac{१९}{४} = ४\frac{३}{४}$,

उदाहरणमाला (७)

नीचे लिखी हुई विषमभिन्नों को संयुक्तभिन्नों में लाओ

(१) $\frac{२६}{४}$ (२) $\frac{४९}{८}$ (३) $\frac{६१}{९}$ (४) $\frac{९५}{११}$ (५) $\frac{१२३}{१६}$ (६) $\frac{३२३}{१९}$ (७) $\frac{७५९५}{१०००}$
(८) $\frac{५३५३}{२९७}$ (९) $\frac{९७१४}{३५७}$ (१०) $\frac{५३०७०}{४६५}$ (११) $\frac{९८७}{६५४}$ (१२) $\frac{१५२८३७}{५९७}$
(१३) $\frac{३९४५०}{४५७}$ (१४) $\frac{५२४५}{३१५}$ (१५) $\frac{६२८५०४}{७९३५}$

४ था प्रकार—प्रभागजाति भिन्न को भागजाति भिन्न में परिवर्तित कर सकते हैं।

नियम—प्रभागजाति भिन्न के सब अंशों का गुणनफल भागजाति भिन्न का अंश होगा और सब छेदों का गुणनफल उसका छेद होगा।

उदाहरण (१) $\frac{४}{५}$ का $\frac{३}{७}$ इसको भागजाति भिन्न का रूप दो।

यहां $\frac{४}{५}$ का $\frac{३}{७} = \frac{४ \times ३}{५ \times ७} = \frac{१२}{३५}$,

यदि किसी प्रभागजाति भिन्न में संयुक्तभिन्न भी हो तो उसको विषमभिन्न का रूप देकर तब ऊपर की क्रिया करनी चाहिये। और यदि किसी अंश और छेद दोनों में एक ही संख्या का निःशेष भाग लगता हो तो उस अंश और छेद में उस संख्या का भाग देना चाहिये। क्योंकि ऐसा करने से प्रक्रम (१०९) प्रक्रम के अनुसार भिन्नसंख्या के मान में कुछ अन्तर न होगा।

उदाहरण (२) $१\frac{५}{७}$ का $\frac{२१}{२५}$ का $\frac{५}{६}$ इसको भागजाति भिन्न में परिणत करो।

यहां $१\frac{५}{७} = \frac{१२}{७}$,

$\therefore$ $१\frac{५}{७}$ का $\frac{२१}{२५}$ का $\frac{५}{६}$ $= \frac{\overset{२}{\cancel{१२}}}{\underset{१}{\cancel{७}}} \times \frac{\overset{३}{\cancel{२१}}}{\underset{५}{\cancel{२५}}} \times \frac{\overset{१}{\cancel{५}}}{\underset{१}{\cancel{६}}} = \frac{६}{५}$

यहां ऊपर अंश के स्थान में २१ और नीचे छेद के स्थान में ७ हैं। इन दोनों में ७ का निःशेष भाग जाता है, इसलिये ऊपर के २१ में ७ का भाग दे कर लब्धि ३ को २१ के ऊपर लिखा और २१ को $\cancel{२१}$ इस तरह काट दिया और नीचे के ७ में ७ का भाग दे कर लब्धि १ को ७ के नीचे लिखा और ७ को $\cancel{७}$ इस तरह काट दिया है। इसी तरह यहां १२ और ६ में ६ का और ५ और २५ में ५ का अपवर्तन दिया है। भिन्न संख्या के अंश और छेद में एक ही संख्या का भाग देने में सर्वत्र ऐसा ही किया जाता है। अब यहां अंश और छेद दोनों में अपवर्तन देने के बाद अंश स्थान में २, ३, १ यह संख्या हैं, इसलिये इनका गुणनफल २ × ३ × १ = ६ को अंश स्थान में रखा और छेद स्थान में १, ५, १ यह संख्या हैं इसलिये इनका गुणनफल १ × ५ × १ = ५ को छेद स्थान में रखा।

नोट—अभिन्न संख्या के नीचे छेद स्थान में १ को रख कर तब आगे गणित करना चाहिये।

उदाहरणमाला (८)

नीचे लिखी हुई अभागजाति भिन्नों को भागजाति भिन्नों में परिवर्तित करो।

(१) $\frac{१}{२}$ का $\frac{२}{३}$ (२) $\frac{३}{४}$ का $\frac{५}{६}$ (३) $\frac{३}{८}$ का $\frac{४}{५}$ (४) $\frac{१५}{१६}$ का $\frac{४}{५}$ (५) २ का $\frac{१}{३}$ का $\frac{२}{५}$ (६) ६ का $\frac{५}{७}$ का $\frac{३}{४}$ (७) $३\frac{१}{४}$ का $\frac{८}{१३}$ का $\frac{३}{७}$ (८) $२\frac{२}{३}$ का $\frac{५}{१४}$ का $\frac{७}{८}$ का १२ का $१\frac{२}{३}$ (९) $\frac{१}{२}$ का $२\frac{१}{२}$ का $३\frac{३}{५}$ का ९ (१०) $३\frac{२}{३}$ का $२\frac{३}{४}$ का ४ का $७\frac{१}{९}$ (११) $३\frac{४}{५}$ का $५\frac{३}{४}$ का $\frac{२}{१९}$ का $१\frac{१}{४६}$ (१२) $\frac{३}{४}$ का $\frac{७}{८}$ का $१\frac{१}{९}$ का $\frac{४}{२१}$ का $१\frac{१}{२}$ (१३) $\frac{९}{१०}$ का $\frac{८}{९}$ का $\frac{७}{८}$ का $\frac{६}{७}$ का $\frac{५}{६}$ का $\frac{४}{५}$ का $\frac{३}{४}$ का $\frac{२}{३}$ का $\frac{१}{२}$ (१४) ११७ का $\frac{१४}{१५}$ का $\frac{११}{१२}$ का $\frac{६}{१३}$ का $\frac{२}{११}$ का $\frac{५}{८}$ का $\frac{४}{९}$ का $\frac{३}{७}$ (१५) $\frac{४}{५}$ का ९ का $७\frac{१}{२}$ का $४\frac{२}{३}$ का $\frac{७}{८}$ का $१\frac{१}{३}$

५ वां प्रकार—भिन्नसंख्या को लघुतम रूप में लाने का प्रकार।

नियम—कोई भिन्नसंख्या अपने लघुतम रूप में तब होती है जब उसके अंश और छेद परस्पर दृढ होते हैं अर्थात् उनका कोई साधारण गुणनखण्ड नहीं होता है। और (९२) प्रक्रम से भिन्नसंख्या के अंश और छेद को परस्पर दृढ़ करने के लिये उनमें उनके महत्तमसमापवर्तक का भाग देना चाहिये। और

अंश और छेद को परस्पर दृढ़ बनाने से ही वह भिन्न संख्या अपने लघुतम रूप में परिणत हो जायगी।

उदाहरण (१) $\frac{१५६}{२२८}$ इसको लघुतम रूप में परिवर्तित करो।

यहां पहिले अंश और छेद के महत्तमसमापवर्तक के लिये न्यास,

```
१५६ ) २२८ ( १
      १५६
      ---
       ७२ ) १५६ ( २
            १४४
            ---
             १२ ) ७२ ( ६
                  ७२
                  --
```

इस लिये उक्त संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक १२ है,

$\therefore \frac{१५६}{२२८} = \frac{१५६ \div १२}{२२८ \div १२} = \frac{१३}{१९}$ यह उद्दिष्ट संख्या का लघुतम रूप है।

अथवा, यदि (८५) प्रक्रम में कहे हुए सिद्धान्तों की सहायता से अंश और छेद के कोई साधारण गुणनखण्ड शीघ्र मालूम हो सकते हों तो उनका अंश और छेद में बार बार भाग देने से कभी कभी अभीष्ट लघुतम रूप लाघव से सिद्ध हो सकता है। ऐसी स्थिति में महत्तमसमापवर्तक निकालने का परिश्रम न करना चाहिये।

उदाहरण (२) $\frac{१२०}{२५२}$ को लघुतम रूप में परिणत करो।

यहां १२० और २५२ में २ का भाग देने से लब्धि ६० और १२६, इनमें फिर २ का अपवर्तन देने से लब्धि ३० और ६३, इनमें फिर ३ से काटने पर लब्धि १० और २१, अब ये अंश और छेद परस्पर दृढ़ होने से $\frac{१०}{२१}$ यही अभीष्ट लघुतम रूप है।

न्यास,

```
 १०
 ३०
 ६०
१२०
---
२५२
१२६
 ६३
 २१
```

अथवा, दी हुई भिन्न संख्या के अंश के रूढ गुणनखण्ड बना कर उनको अंशस्थान में रखो और उसके छेद के रूढ गुणनखण्डों को छेदस्थान में रखो। तब प्रभागजाति भिन्न में कहे हुए प्रकार के अनुसार उन अंश और छेद के गुणनखण्डों का परस्पर काटने पर अंश के गुणन खण्डों का गुणन फल अंशस्थान में रखो और छेद के गुणनखण्डों का गुणनफल छेदस्थान में रखो। तब अभीष्ट लघुतम रूप सिद्ध होगा।

उदाहरण (१) $\frac{१२६०}{५५४४}$ इसको लघुतम रूप दो।

यहां १२६० = २ × २ × ३ × ३ × ५ × ७

और ५५४४ = २ × २ × २ × ३ × ३ × ७ × ११

$\therefore \frac{१२६०}{५५४४} = \frac{२ × २ × ३ × ३ × ५ × ७}{२ × २ × २ × ३ × ३ × ७ × ११} = \frac{५}{२२}$ यही अभीष्ट लघुतम रूप है।

नोट—भिन्न संख्या के अंश और छेद की संख्या छोटी हों तो गुणनादि क्रिया करने में लाघव होता है, यही लघुतम रूप देने का प्रधान कारण है। इस लिये जहां जहां भिन्न संख्या से गणित करना हो वहां उसके स्थान में उसका लघुतम रूप लेना चाहिये और यदि अन्त में भिन्नसंख्यारूप फल उत्पन्न हो तो वहां उसका लघुतम रूप सर्वत्र लेना चाहिये।

उदाहरणमाला (६)

नीचे दी हुई भिन्नों को अति संक्षिप्त रूप दो।

(१) $\frac{७}{४९}$ (२) $\frac{१४}{३५}$ (३) $\frac{१३६}{२८९}$ (४) $\frac{१५४}{७१५}$ (५) $\frac{५५२}{५७५}$

(६) $\frac{२८८}{५४९}$ (७) $\frac{४३२}{१०३६८}$ (८) $\frac{२२०५}{२७९३}$ (९) $\frac{१७८०}{३२०४}$

(१०) $\frac{३९२७}{६१७१}$ (११) $\frac{४९५}{१२१०}$ (१२) $\frac{९९०}{१९३५}$ (१३) $\frac{१७०२}{१८८०}$

(१४) $\frac{३०९४}{३०४२}$ (१५) $\frac{८३९८}{२९३९३}$ (१६) $\frac{३०४२९}{८८६४१}$ (१७) $\frac{१३३१}{१४६४१}$

(१८) $\frac{२२७१}{९९९०}$ (१९) $\frac{१४२८५७}{९९९९९९}$ (२०) $\frac{७६९२३०}{९९९९९९}$

इनको काटकर लघुतमरूप दो।

(२१) $\frac{३ × १६}{८ × १२}$ (२२) $\frac{६ × १२ × २१}{३ × ७ × ४ × ३३}$ (२३) $\frac{१५ × २४ × ५}{१८ × १२ × २५}$

(२४) $\frac{२७ × २१ × १२}{८१ × १६ × ७}$ (२५) $\frac{३७ × ३ × ५ × १४ × ३}{१११ × १५ × २१ × २ × २}$

६ वा प्रकार—दो वा अधिक भिन्नसंख्याओं को समच्छेद का रूप देने का प्रकार अर्थात् उनको ऐसे रूपों में लाने का प्रकार जिनमें उन सबके छेद परस्पर समान हों।

यहां यदि उद्दिष्ट भिन्नसंख्याओं में कोई अन्य जाति की भिन्नसंख्या हो तो उसको पहिले भागजाति भिन्न का रूप देना चाहिये और यदि कोई भिन्न अपने लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप देकर तब उनको समच्छेद का रूप देना चाहिये।

नियम—दी हुई भिन्न संख्याओं के छेदों का लघुतमसमापवर्त्य निकालो। उस लघुतमसमापवर्त्य में प्रत्येक छेद का भाग देकर लब्धि से उसके अंश को गुण

दो। तब यह सब गुणनफल अभीष्ट अंश होंगे और इन सबके छेद में वह लघुतमसमापवर्त्य होगा।

उदाहरण, $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$ और $\frac{७}{९}$ इनको समच्छेद का रूप दो।

यहां छेदों के लघुतमसमापवर्त्य के लिये न्यास,

२) ४, ६, ९
३) २, ३, ९
   २, १, ३

∴ २ × ३ × २ × ३ = ३६ यह छेदों का लघुतमसमापवर्त्य है। अब,

∵ ३६ ÷ ४ = ९ ∴ $\frac{३}{४} = \frac{३\times९}{४\times९} = \frac{२७}{३६}$

∵ ३६ ÷ ६ = ६ ∴ $\frac{५}{६} = \frac{५\times६}{६\times६} = \frac{३०}{३६}$

∵ ३६ ÷ ९ = ४ ∴ $\frac{७}{९} = \frac{७\times४}{९\times४} = \frac{२८}{३६}$

अतः दी हुई भिन्नों के $\frac{२७}{३६}$, $\frac{३०}{३६}$ और $\frac{२८}{३६}$ ये समच्छेद रूप हैं।

नोट—यहां छेदों के ३६ इस लघुतमसमापवर्त्य के स्थान में ७२, १०८, १४४ इत्यादि उन छेदों के साधारण समापवर्त्यों में से कोई एक साधारण समापवर्त्य लेने से भी अभीष्ट सिद्धि हो सकती है। परन्तु छेदों का लघुतम साधारण समापवर्त्य लेने से गुणन और भाग की क्रिया में लाघव होता है।

उदाहरणमाला (१०)

नीचे लिखी भिन्नों को समान छेदवाली भिन्नों में परिवर्तित करो

(१) $\frac{३}{५}, \frac{४}{७}$ (२) $\frac{३}{४}, \frac{४}{५}, \frac{५}{६}$ (३) $\frac{५}{७}, \frac{७}{९}, \frac{११}{१४}$ (४) $\frac{३}{५}, \frac{५}{७}, \frac{४}{९}, \frac{२}{११}$
(५) $\frac{५}{१४}, \frac{२}{२१}, \frac{१३}{३५}, \frac{८}{४२}$ (६) $\frac{७}{१२}, \frac{९}{१६}, \frac{१३}{२०}, \frac{५}{२७}$ (७) $\frac{७}{१८}, \frac{९}{२२}, \frac{११}{६३}, \frac{२}{७७}$
(८) $\frac{१७}{१४३}, \frac{१४}{६५}, \frac{१२}{५५}, \frac{११}{५२}$ (९) $\frac{१५}{७२}, \frac{९}{१०४}, \frac{८}{११७}, \frac{१३}{१२०}, \frac{१७}{१३५}$
(१०) $\frac{११}{१२}, \frac{१२}{१३}, \frac{१३}{१४}, \frac{१४}{१५}, \frac{१५}{१६}$ (११) $\frac{३९}{७७}, \frac{२१}{३५}, \frac{९}{१४}, \frac{१}{३}, \frac{२}{५}, \frac{३}{७}$
(१२) $२\frac{४}{५}, \frac{६}{७}$, का $\frac{१४}{१५}$, ८ (१३) ३, $\frac{१४}{१९५}, \frac{१५}{२२१}, \frac{१६}{२५५}$
(१४) $\frac{१}{४२}, \frac{१}{४५}, \frac{१}{४८}, \frac{१}{५४}, \frac{१}{५६}, \frac{१}{६३}, \frac{१}{७२}$ (१५) $\frac{१२१}{२१०}, \frac{४९}{३३०}, \frac{२५}{४६२}, \frac{९}{७७०}, \frac{४}{११५५}$

भिन्नसंख्या के सम्बन्ध के ध्यान में रखने योग्य नियम—

(१) भिन्नसंख्या के अंश को कायम रख कर छेद को जैसे जैसे बढाते वा घटाते जाओगे वैसे वैसे उस भिन्नसंख्या का मान क्रम से कम वा अधिक होगा।

(२) भिन्नसंख्या के छेद को कायम रख कर उसके अंश को जैसे जैसे बढाते

वा घटाते जाओगे वैसे वैसे उस भिन्नसंख्या का मान क्रम से अधिक वा न्यून होगा।

(३) दी हुई समभिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों में एक ही अंक जोड़ कर जो नई भिन्नसंख्या होगी उसका मान दी हुई समभिन्न संख्या के मान से अधिक होगा।

(४) दी हुई समभिन्न संख्या के अंश और छेद दोनों में एक ही अंक घटाने से जो नई भिन्नसंख्या होगी उसका मान दी हुई समभिन्न संख्या के मान से कम होगा।

(५) दी हुई विषमभिन्न संख्या के अंश और छेद दोनों में एक ही अंक जोड़ कर जो नई भिन्नसंख्या होगी उसका मान दी हुई विषमभिन्न संख्या के मान से कम होगा।

(६) दी हुई विषमभिन्न संख्या के अंश और छेद दोनों में एक ही अंक घटाने से जो नई भिन्नसंख्या होगी उसका मान दी हुई विषमभिन्न संख्या के मान से अधिक होगा।

(७) समान छेद वाली भिन्नों में सब से बड़ी भिन्न वह होती है जिसका अंश सब से बड़ा होता है और सब से छोटी वह भिन्न होती है जिसका अंश सब से छोटा होता है। जैसे, $\frac{१}{८}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{७}{८}$, इन में सब से बड़ी भिन्नसंख्या $\frac{७}{८}$ है, क्योंकि ७ सब से बड़ा अंश है और $\frac{१}{८}$ यह सब से छोटी भिन्न है।

(८) समान अंश वाली भिन्नों में सब से बड़ी भिन्न वह होती है जिसका छेद सब से छोटा होता है और सब से छोटी वह भिन्न होती है जिसका छेद सब से बड़ा होता है। जैसे, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{४}$, इन में सब से बड़ी भिन्न $\frac{१}{२}$ यह है, क्योंकि २ यह सब से छोटा छेद है। और सब से छोटी $\frac{१}{५}$ यह भिन्न है।

प्रकार ७ वा—दो वा अधिक भिन्नसंख्याओं को समान अंश वाली भिन्नों में परिवर्तित करने का प्रकार।

नियम—दी हुई भिन्नसंख्याओं के अंशों का लघुतमसमापवर्त्य निकालो। तब प्रत्येक अंश का उस लघुतमसमापवर्त्य में भाग देने से जो लब्धि होगी उससे उसके छेद को गुण दो। तब यह सब गुणनफल अभीष्ट छेद होंगे और उन सब के अंश में वह लघुतमसमापवर्त्य होगा।

उदाहरण, $\frac{६}{११}$, $\frac{१८}{२३}$, $\frac{८}{१३}$ इनको ऐसी भिन्नों में परिवर्तित करो जिनका अंश परस्पर तुल्य होगा।

यहां अंशों का लघुतमसमापवर्त्य निकालने के लिये न्यास,

२) ६, १८, ८
३) ३, ९, ४
    १, ३, ४

$\therefore$ २×३×३×४ = ७२ यह अंशों का लघुतमापवर्य है। अब,

$\because$ ७२ ÷ ६ = १२ $\qquad \therefore \frac{६}{११} = \frac{६ \times १२}{११ \times १२} = \frac{७२}{१३२}$

$\because$ ७२ ÷ १८ = ४ $\qquad \therefore \frac{१८}{२३} = \frac{१८ \times ४}{२३ \times ४} = \frac{७२}{९२}$

$\because$ ७२ ÷ ८ = ९ $\qquad \therefore \frac{८}{१३} = \frac{८ \times ९}{१३ \times ९} = \frac{७२}{११७}$

अतः दी हुई भिन्नों की सजातीय $\frac{७२}{१३२}$, $\frac{७२}{९२}$, $\frac{७२}{११७}$ ये समान अंश वाली भिन्नें हैं।

भिन्नसंख्याओं का न्यूनाधिकभाव

(११४) दी हुई भिन्नों में कौन सब से बड़ी वा छोटी है इसको मालूम करने के लिये दी हुई भिन्नों को समान छेद वाली सजातीय भिन्नों में परिवर्तित करो। तब जिस भिन्न का अंश सब से बड़ा होगा वह सब से बड़ी भिन्न और जिसका अंश सब से छोटा होगा वह सबसे छोटी भिन्न होगी।

उदाहरण(१) $\frac{३}{७}$, $\frac{१७}{२४}$, $\frac{२३}{४२}$, इनमें सब से बड़ी और सब से छोटी भिन्न कौन है?

यहां छेदों का लघुतमसमापवर्त्य = १६८ और,

$\because$ १६८ ÷ ७ = २४ $\qquad \therefore \frac{३}{७} = \frac{३ \times २४}{७ \times २४} = \frac{७२}{१६८}$

$\because$ १६८ ÷ २४ = ७ $\qquad \therefore \frac{१७}{२४} = \frac{१७ \times ७}{२४ \times ७} = \frac{११९}{१६८}$

$\because$ १६८ ÷ ४२ = ४ $\qquad \therefore \frac{२३}{४२} = \frac{२३ \times ४}{४२ \times ४} = \frac{९२}{१६८}$

अतः $\frac{७२}{१६८}$, $\frac{११९}{१६८}$, $\frac{९२}{१६८}$, इन समान छेद वाली सजातीय भिन्नों में दूसरी का अंश सब से बड़ा और पहिली का अंश सब से छोटा होने से दी हुई भिन्नों में पहिली सब से छोटी और दूसरी सब से बड़ी भिन्न है।

अथवा, दी हुई भिन्नों का न्यूनाधिक भाव जानने के लिये दी हुई भिन्नों को समान अंश वाली भिन्नों में परिवर्तित करो। तब जिस भिन्न का छेद सब से छोटा होगा वह सब से बड़ी और जिसका छेद सब से बड़ा होगा वह सब से छोटी भिन्न होगी।

उदाहरण (२) $\frac{७}{१३}$, $\frac{२१}{२९}$, $\frac{१२}{१७}$, इनमें सब से बड़ी और सब से छोटी भिन्न का निर्णय अंशों के लघुतमसमापवर्त्य की सहायता से करो।

यहां अंशों का लघुतमसमापवर्त्य = ८४ और,

$\because ८४ \div ७ = १२$ $\therefore \frac{७}{१३} = \frac{७ \times १२}{१३ \times १२} = \frac{८४}{१५६}$

$\because ८४ \div २१ = ४$ $\therefore \frac{२१}{२९} = \frac{२१ \times ४}{२९ \times ४} = \frac{८४}{११६}$

$\because ८४ \div १२ = ७$ $\therefore \frac{१२}{१७} = \frac{१२ \times ७}{१७ \times ७} = \frac{८४}{११९}$

अतः $\frac{८४}{१५६}$, $\frac{८४}{११६}$, $\frac{८४}{११९}$ इन समान अंश वाली सजातीय भिन्नों में दूसरी का छेद सब के छेदों से छोटा और पहिली का छेद सब से बड़ा होने से दी हुई भिन्नों में दूसरी सब से बड़ी और पहिली सब से छोटी भिन्न है।

उदाहरणमाला (११)

नीचे दी हुई भिन्नों में सब से बड़ी और सब से छोटी भिन्नों को बताओ

(१) $\frac{४}{५}$, $\frac{८}{९}$ (२) $\frac{५}{६}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{३}{१४}$ (३) $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{८}$ (४) $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{८}{१९}$ (५) $\frac{३}{४}$ का $\frac{८}{१५}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{२}{३}$ का $\frac{५}{८}$ (६) $२\frac{१}{२}$ का $\frac{४}{५}$, $२\frac{१}{३}$, ८ का $\frac{३}{७}$ $२\frac{३}{१०}$ (७) $\frac{११}{१२}$, $\frac{१२}{१३}$, $\frac{७}{९}$, $\frac{३}{३६}$, $\frac{७}{३९}$

नीचे लिखी भिन्नों को उनके मान के अनुसार क्रम से लिखो

(८) $\frac{१}{५}$, $\frac{२}{९}$, $\frac{३}{१४}$, $\frac{५}{२३}$, $\frac{८}{३७}$ (९) $\frac{११}{३०}$, $\frac{१६}{३५}$, $\frac{१७}{४०}$, $\frac{१९}{४२}$, $\frac{२३}{४८}$, $\frac{२५}{५}$

(१०) $\frac{२}{५}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{७}{१७}$, $\frac{१२}{२९}$, $\frac{१९}{४६}$, इन में कौन कौन संख्या $\frac{३१}{७५}$ इस संख्या से बड़ी और कौन कौन छोटी हैं?

(११) एक बच्चा प्रति दिन $\frac{७}{१२}$ शीशी दूध पीता है और दूसरा $\frac{९}{१६}$ शीशी दूध पीता है, तो बताओ कौन बच्चा कम दूध पीता है?

भिन्नसंख्याओं का संकलन

(११५) जोड़ समान जाति के पदार्थों का ही होता है भिन्न जाति के पदार्थों का नहीं होता, यह तुमको मालूम हो चुका है। जैसे, ५ रुपये में तुम ३ पौण्ड जोड़ नहीं सकते हो। यहां तक कि तुम ५ रुपये में ३ आनों को भी नहीं जोड़ सकते जब तक तुम रुपये के आने नहीं बना लेते हो। इसी तरह तुम उन भिन्नों को भी नहीं जोड़ सकते जिनके छेद परस्पर समान नहीं हैं। जब तुम उन भिन्नों को, जिन का जोड़ करना है, समच्छेद का रूप दे कर सजातीय भिन्नों में परिवर्तित कर लेते हो तब उनका योग करना सम्भव होता है। इससे यह नियम

निकलता है कि जिन भिन्नों का जोड़ करना होता है उनको पहिले समच्छेद का रूप देना चाहिये। तब उन समान छेद वाली सजातीय भिन्नों के अंशों के योग को योगफल के अंशस्थान में रख कर उन समान छेद वाली भिन्नों के छेद को योगफल के छेदस्थान में रखना चाहिये। ऐसा करने से अभीष्ट योगफल सिद्ध होता है। और यदि योगफल की भिन्नसंख्या लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप देना चाहिये और यदि योगफल की विषम भिन्न संख्या हो तो उसको संयुक्त भिन्न में परिवर्तित करना चाहिये।

यदि योग करने के लिये दी हुई सब भिन्नसंख्याओं के छेद परस्पर समान हों तो उन भिन्नसंख्याओं के अंशों के योग को योगफल के अंशस्थान में रख कर उसके छेदस्थान में दी हुई भिन्नसंख्याओं में से किसी एक का छेद रखने से अभीष्ट योगफल सिद्ध होगा।

उदाहरण (१) $\frac{३}{७}, \frac{४}{७}, \frac{५}{७}$, इनका योग करो।

यहां $\frac{३}{७}+\frac{४}{७}+\frac{५}{७}=\frac{३+४+५}{७}=\frac{१२}{७}=१\frac{५}{७}$ यह अभीष्ट योगफल है।

उदाहरण (२) $\frac{३}{७}, \frac{५}{१४}, \frac{३}{४}$, इनका योग करो।

यहां छेदों का लघुतमसमापवर्त्य = २८ है। अब,

$\because २८ \div ७ = ४$ $\qquad \therefore \frac{३}{७}=\frac{३\times४}{७\times४}=\frac{१२}{२८}$

$\because २८ \div १४ = २$ $\qquad \therefore \frac{५}{१४}=\frac{५\times२}{१४\times२}=\frac{१०}{२८}$

$\because २८ \div ४ = ७$ $\qquad \therefore \frac{३}{४}=\frac{३\times७}{४\times७}=\frac{२१}{२८}$

$\therefore \frac{३}{७}+\frac{५}{१४}+\frac{३}{४}=\frac{१२}{२८}+\frac{१०}{२८}+\frac{२१}{२८}=\frac{१२+१०+२१}{२८}=$
$\frac{४३}{२८}=१\frac{१५}{२८}$ यह अभीष्ट योग फल है।

नोट—यहां पर्याप्त अभ्यास होने पर ऊपर के उदाहरण की तरह समान छेद वाली भिन्नों को अलग लिखने की आवश्यकता नहीं होती है। केवल उन छेदों के लघुतमसमापवर्त्य को एक ही बार नीचे लिख कर उसके ऊपर एक लम्बी रेखा करके उस रेखा के ऊपर उन समच्छेद भिन्नों के अंशों को लिखना चाहिये।

(११६) यदि योग करने के लिये दी हुई भिन्नों में कुछ विषमभिन्न संख्याएँ हों तो लाघव के लिये उनको पहिले संयुक्त भिन्नों में परिवर्तित करना चाहिये। और यदि कुछ अभिन्न संख्याएँ भी हों तो उनका और संयुक्त भिन्नों को अभिन्न-संख्याओं का योग अलग करना चाहिये। और संयुक्तभिन्नों की भिन्न संख्याओं का जोड़ अलग करना चाहिये। यदि उन भिन्नसंख्याओं के योगफल की विषम-

भिन्न संख्या हो तो उसको संयुक्तभिन्न में परिणत करके उस संयुक्त भिन्न अभिन्न भाग को भी उन अभिन्न संख्याओं के योग में जोड़ना चाहिये। औ यदि कोई भिन्न अपने लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप में ला कर त यह क्रिया करनी चाहिये।

उदाहरण (३) $२\frac{१}{३}, \frac{१०}{१२}, \frac{१९}{४}$, और ७, इनका योग करो।

यहां $२\frac{१}{३} = २ + \frac{१}{३}, \frac{१०}{१२} = \frac{५}{६}, \frac{१९}{४} = ४ + \frac{३}{४}$,

$\therefore २\frac{१}{३} + \frac{१०}{१२} + \frac{१९}{४} + ७ = २ + \frac{१}{३} + \frac{५}{६} + ४ + \frac{३}{४} + ७$,

$= (२ + ४ + ७) + (\frac{१}{३} + \frac{५}{६} + \frac{३}{४})$,

$= १३ + \frac{४+१०+९}{१२}$,

$= १३ + \frac{२३}{१२}$,

$= १३ + १ + \frac{११}{१२}$,

$= १४ + \frac{११}{१२}$,

$= १४\frac{११}{१२}$ यह अभीष्ट योग फल है।

उदाहरण (४) ७ रु० ९ आ० $२\frac{१}{२}$ पा०, ५ रु० १० आ० $७\frac{११}{१२}$ पा० औ १३ रु० १४ आ० $६\frac{२}{३}$ पा० इनका योग करो।

	रु०	आ०	पा०
न्यास—	७	९	$२\frac{१}{२}$
	५	१०	$७\frac{११}{१२}$
	१३	१४	$६\frac{२}{३}$
	२७	२	$५\frac{१}{२}$=योग,

यहां $२\frac{१}{२}$ पा० + $७\frac{११}{१२}$ पा० + ६ पा० = (२ + ७ + ६) पा० + ($\frac{१}{२}$ $\frac{११}{१२}$ + $\frac{२}{३}$) पा० = १५ पा० $\frac{६+११+८}{१२}$ पा० = १५ पा० + पा० = १५ पा० + २ पा० + $\frac{१}{१२}$ प = १७ पा० + $\frac{१}{१२}$ पा०, इसमें पा० को योग के चिह्न के स्थान रखा, और १७ पा० = १ आ० ५ प इसमें ५ पा० को $\frac{१}{१२}$ पा० की बांई योगस्थान में रखा, और हाथ १ आ० को आनों का जोड़ २३ में जोड़ा तो २४ आ० = २ रु० २ आ इसमें २ आ० को योगस्थान में र और हाथ लगे २ रु० को रुपयों जोड़ २५ रु० में जोड़ा तो २७ रु० योगस्थान में रखा।

उदाहरणमाला (१२)

इनका योग करो

(१) $\frac{१}{५}, \frac{२}{५}, \frac{४}{५}$ (२) $\frac{२}{३}, \frac{३}{४}$ (३) $\frac{७}{२४}, \frac{१}{४८}$ (४) $७\frac{१}{३}, \frac{५}{६}$ (५) $३\frac{२}{७}, ५\frac{१}{४}$ (६) $\frac{१}{३}, \frac{१}{५}, \frac{१}{७}$ (७) $\frac{७}{८}, \frac{९}{१०}, \frac{११}{१२},$ (८) $\frac{१३}{३५}, \frac{२३}{४०}, \frac{३}{५६}$ (९) $\frac{४}{७}, \frac{१}{२४}, \frac{३}{५६}$ (१०) $\frac{१}{१०}, \frac{५}{१८}, \frac{८}{४५}$

इनका मान निकालो

(११) $\frac{१७}{१८}+\frac{२१}{२२}+\frac{९१}{९९}$ (१२) $\frac{५}{२१}+\frac{५}{३३}+\frac{१}{३५}+\frac{२१}{५५}$ (१३) $\frac{१}{३३}+\frac{२२}{३९}+\frac{५}{७७}+\frac{३}{९१}$ (१४) $\frac{१०४}{१०५}+\frac{१६३}{१६५}+\frac{२३०}{२३१}+\frac{३१८}{३८५}$ (१५) $१\frac{१}{२}+२\frac{२}{३}+३\frac{३}{४}+४\frac{४}{५}+५\frac{५}{६}$ (१६) $१०\frac{१}{७}+११\frac{१}{८}+१२\frac{१}{९}+१३\frac{१}{१०}+१४\frac{१}{१२}$ (१७) $\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}+\frac{१}{३२}+\frac{१}{६४}+\frac{१}{१२८}+\frac{१}{२५६}$ (१८) $२\frac{१}{५}+५\frac{३}{७}$ का $\frac{२१}{२५}+१\frac{१}{१०}$ का $७\frac{१}{५}$ का $३\frac{१}{२}$ (१९) १ पौं० ९ शि० $२\frac{३}{८}$ पे०, २ पौं० १ शि० $५\frac{३}{४}$ पे०, ३ पौं० ७ शि० $\frac{१५}{१६}$ पे०, और १ पौं० १ शि० $३\frac{१}{२}$ पे० इनका योग करो ।

(२०) एक हौज में ३ पाइप लगे हैं, एक पाइप उस हौज को ९ घण्टे में, दूसरा १२ घण्टे में और तीसरा १८ घण्टे में भर देता है, यदि तीनों पाइप एक साथ खोल दिये जांय तो ३ घण्टे में उस पूरे हौज का कौन सा हिस्सा भरेगा ?

(२१) एक काम को एक मनुष्य ८ घण्टे में, दूसरा ७ घण्टे में और तीसरा १४ घण्टे में कर सकता है, यदि तीनों मनुष्य मिल कर उस काम को करने लगे तो २ घण्टे में वे उस काम का कौन सा भाग पूरा करेंगे ?

(२२) यहां नीचे एक योग चक्र दिया गया है। इसमें हर एक खड़ी, आडी वा तिरछी पङ्क्ति की भिन्न संख्याओं का जोड़ $\frac{१}{१४०}$ होता है। इस प्रकार इसमें योग के आठ उदाहरण हैं।

$\frac{१}{५०४}$	$\frac{१}{६३०}$	$\frac{१}{२८०}$
$\frac{१}{२५२}$	$\frac{१}{४२०}$	$\frac{१}{१२६०}$
$\frac{१}{८४०}$	$\frac{१}{३१५}$	$\frac{१}{३६०}$

भिन्नसंख्याओं का व्यवकलन

(११७) अन्तर करने के लिये दी हुई सब भिन्नसंख्याओं का छेद एक ही

हों तो उनके अंशों का अन्तर अंशस्थान में लिखो और छेदस्थान में दी हु
भिन्नसंख्याओं में से किसी एक का छेद रखो ।

उदाहरण (१) $\frac{५}{७}$ में से $\frac{२}{७}$ को घटाओ ।

यहां $\frac{५}{७} - \frac{२}{७} = \frac{५-२}{७} = \frac{३}{७}$ यह अभीष्ट अन्तर है ।

(११८) यदि दी हुई भिन्नसंख्याओं के छेद परस्पर भिन्न हों तो उनके समच्छेद का रूप दो । तब उन समान छेद वाली भिन्नों के अंशों का अन्तर अंशस्थान में रख कर छेदस्थान में उस समान छेद को रखो ।

उदाहरण (२) $\frac{४}{५}$ में से $\frac{३}{७}$ को घटाओ ।

यहां $\frac{४}{५} - \frac{३}{७} = \frac{२८}{३५} - \frac{१५}{३५} = \frac{२८-१५}{३५} = \frac{१३}{३५}$ यह अभीष्ट अन्तर है ।

उदाहरण (३) ७ में से $\frac{३}{१५}$ को घटाओ ।

यहां $७ - \frac{३}{१५} = \frac{७}{१} - \frac{३}{१५} = \frac{१०५}{१५} - \frac{३}{१५} = \frac{१०५-३}{१५} = \frac{\cancel{१०२}^{३४}}{\cancel{१५}_{५}} = \frac{३४}{५} =$
$६\frac{४}{५}$ यह अभीष्ट अन्तर है ।

उदाहरण (४) ४ और $३\frac{१}{४}$ इनका अन्तर करो ।

यहां $४ - ३\frac{१}{४} = (४ - ३) - \frac{१}{४} = १ - \frac{१}{४} = \frac{४}{४} - \frac{१}{४} = \frac{४-१}{४}$
$= \frac{३}{४}$ यह अभीष्ट अन्तर है ।

(११९) यदि वियोज्य और वियोजक दोनों की संयुक्तभिन्न संख्या हों त उनके अभिन्न भागों का अन्तर अभिन्नसंख्या के स्थान में रखो । और भिन्न भाग का अन्तर भिन्नसंख्या के स्थान में रखो । यहां यदि वियोज्य की भिन्न वियोज की भिन्न से न्यून हो तो उनका अन्तर ऋण होगा, इस लिये उस ऋण अन्तर १ में घटा कर शेष को भिन्नसंख्या के स्थान में रखो । और अभिन्न संख्याओं अन्तर में १ घटा दो । यहां वियोज्य और वियोजक की भिन्नों में कोई अप लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप देना चाहिये और यदि कोई विष भिन्न हों तो उसको संयुक्तभिन्न का रूप देने से लाघव होता है ।

उदाहरण (५) $९\frac{२}{१५}$ में से $\frac{३०}{८}$ को घटाओ ।

यहां $\frac{३०}{८} = \frac{१५}{४} = ३\frac{३}{४}$,

$\therefore ९\frac{२}{१५} - \frac{३०}{८} = ९\frac{२}{१५} - ३\frac{३}{४} = (९ - ३) + (\frac{२}{१५} - \frac{३}{४})$
$= ६ + (\frac{८}{६०} - \frac{४५}{६०})$ ...... यहां इस समच्छेद के रूप से स्पष्ट मालूम होता है कि वियोज्य की भिन्न से वियोजक की भिन्न बड़ी है। इस लिये अभिन्नसंख्याओं का अन्तर ९ में १ घटा या है और उन भिन्नों के $-\frac{३७}{६०}$ इस ऋण अन्तर को एक में घटा दिया है।
$= ६ + (\frac{८ - ४५}{६०})$
$= (६ - १) + (१ - \frac{३७}{६०})$
$= ५ + \frac{२३}{६०} = ५\frac{२३}{६०}$ यह अभीष्ट अन्तर है।

(१२०) जब धन, ऋण चिह्नों से युक्त कई भिन्न संख्याओं का मान निकालना होता है तब (२५) प्रक्रम के अनुसार धन चिह्नों से युक्त सब भिन्नसंख्याओं का योग करो। फिर ऋण चिह्नों से युक्त सब भिन्नसंख्याओं का योग करो। तब इन दोनों योगों का अन्तर करो वही उत्तर होगा। और यदि धन भिन्नों का योग ऋण भिन्नों के योग से अधिक वा न्यून होगा तो उत्तर को क्रम से धन वा ऋण समझना चाहिये। और उत्तर को सर्वदा लघुतम रूप में लिखना चाहिये।

उदाहरण (४) $\frac{१}{२} - \frac{१}{३} + \frac{१}{५} - \frac{१}{६}$ इनका मान क्या है?

यहां $\frac{१}{२}$ और $\frac{१}{५}$ इन धनभिन्नों का योग,
$\frac{१}{२} + \frac{१}{५} = \frac{५ + २}{१०} = \frac{७}{१०}$, और $-\frac{१}{३} - \frac{१}{६}$ इन ऋण भिन्नों का योग,
$-\frac{१}{३} - \frac{१}{६} = -\frac{२}{६} - \frac{१}{६} = \frac{-२-१}{६} = -\frac{३}{६} = -\frac{१}{२}$,
$\therefore \frac{७}{१०} - \frac{१}{२} = \frac{७-५}{१०} = \frac{२}{१०} = \frac{१}{५}$ उत्तर,

उदाहरणमाला (१३)

घटाओ

(१) $\frac{७}{९}$ में से $\frac{४}{९}$ को (२) $\frac{३}{४}$ में से $\frac{१}{२}$ को (३) $\frac{५}{९}$ में से $\frac{७}{१३}$ को
(४) $\frac{२}{२१}$ में से $\frac{१}{३५}$ को (५) $\frac{७}{४५}$ में से $\frac{१}{१५}$ को (६) $१\frac{७}{१२}$ में से $\frac{२}{१९}$ को

(७) $२१\frac{३}{५}$ में से $१७\frac{९}{१०}$ को (८) $\frac{११७}{५८}$ में से $१\frac{४}{७}$ को (९) $\frac{२७}{४}$ में से $\frac{३}{१५}$ को

(१०) $१४\frac{१}{३}$ में से $३\frac{१}{५}$ को (११) $२६\frac{२}{५}$ में से $१८\frac{१२}{२३}$ को

(१२) $\frac{१०३}{१२}$ में से $\frac{१२}{१०३}$ को (१३) $१७२\frac{१}{८}$ में से $\frac{९७}{८}$ को

(१४) $२१\frac{२}{१५}$ में से $७\frac{१}{९}$ को (१५) $५०\frac{७}{८१}$ में से $४०\frac{८}{२७}$ को

(१६) $३९\frac{१०}{१३}$ में से $२७\frac{२०}{२१}$ को (१७) $३४\frac{१}{८}$ में से $२४\frac{१}{७}$ को

(१८) ७ में से $\frac{२}{२१}$ को (१९) १० में से $\frac{१०}{१९}$ को (२०) २० में से $९\frac{२०}{२१}$ को

इनका मान निकालो

(२१) $\frac{६}{९१} - \frac{१}{१५६} + \frac{११}{१६८}$ (२२) $\frac{१}{६०} - \frac{१}{१२०} + \frac{१}{३६०}$

(२३) $\frac{१}{१८९} + \frac{१}{२१६} - \frac{१}{७२८}$ (२४) $\frac{१}{६६} - \frac{३}{७७} + \frac{१९}{७८} - \frac{६}{९१}$

(२५) $२\frac{१}{२} + ३\frac{४}{५} - १\frac{१}{३} + \frac{१}{५} - १\frac{१}{६}$

(२६) ७ रु० २ आ० $३\frac{१}{४}$ पा० में से २ रु० १३ आ० $११\frac{३}{८}$ पा० को घटाओ ।

(२७) १२ रु० ९ आ० ६ पा० में से ७ रु० १० आ० $५\frac{३}{७}$ पा० को घटाओ।

(२८) १४ पौं० ७ शि० $३\frac{५}{१६}$ पे० में से २ पौं० १७ शि० $९\frac{७}{८}$ पे० को घटाओ

(२९) एक संख्या का चतुर्थांश उसके द्वादशांश से ६ अधिक है तो उस संख्या को बताओ ।

(३०) एक मनुष्यने अपने धन का $\frac{५}{१२}$ भाग एक लड़के को और $\frac{७}{१८}$ भाग दूसरे लड़के को दिया, तो उसके पास सब धन का कौन सा भाग शेष रहा ?

भिन्नसंख्याओं का गुणन

(१२१) भिन्नसंख्या को अभिन्नसंख्या से गुणा करना हो तो उस भिन्न-संख्या के अंश को अभिन्नसंख्या से गुण कर गुणनफल को अंशस्थान में रखो। और छेद के स्थान में उस भिन्न का छेद रखो । यदि भिन्न का छेद और अभिन्न-संख्या इन दोनों में किसी एक ही संख्या का निःशेष भाग लगता हो तो प्रभागजाति भिन्न में कहे हुए प्रकार के अनुसार उनको काट कर तब गुणनफल करो । और उत्तर को सर्वदा लघुतम रूप में लिखो । और यदि उत्तर विषमभिन्न में हो तो उसको संयुक्त भिन्न में लिखो ।

उदाहरण (१) $\frac{५}{१२}$ को ४ से गुणा करो ।

यहां $\frac{५}{१२}$ को ४ से गुणा करने का अर्थ (२७) प्रक्रम से यह होता है कि

$\frac{५}{१२}$ को ४ स्थान में रख कर उन सब का योग करना, तब $\frac{५}{१२} \times ४ = \frac{५}{१२} + \frac{५}{१२} + \frac{५}{१२} + \frac{५}{१२} = \frac{५+५+५+५}{१२} = \frac{५ \times ४}{१२} = \frac{५}{३} = १\frac{२}{३}$ उत्तर,

नोट—इससे (११०) प्रक्रम के नियम की सत्यता प्रमाणित होती है कि भिन्नसंख्या के अंश को गुणना उसके छेद को भागने के बराबर होता है। और किसी अभिन्नसंख्या का पावहिस्सा, अद्धा, पौना, सवैया करना उस अभिन्नसंख्या को क्रम से $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$, $१\frac{१}{४}$ से गुणा करने के बराबर होता है।

(१२२) संयुक्तभिन्न को अभिन्नसंख्या से गुणा करना हो तो उस अभिन्न संख्या से संयुक्तभिन्न की अभिन्नसंख्या और भिन्नसंख्या दोनों को गुण कर गुणनफलों का योग अभीष्ट गुणनफल होता है। किन्तु गुण्य गुणक दोनों की संयुक्तभिन्न संख्या हों तो उनको विषमभिन्न संख्या में परिवर्तित करके तब उनका गुणन करने में लाघव होता है।

उदाहरण (२) $९\frac{७}{१२}$ को ४ से गुणा करो।

यहां $९\frac{७}{१२} \times ४ = ९ \times ४ + \frac{७}{१२} \times ४ = ३६ + \frac{७}{३} = ३६ + २\frac{१}{३} = ३८\frac{१}{३}$

यह उत्तर है।

(१२३) दो वा अधिक भिन्नसंख्याओं का गुणन करने में सब भिन्नसंख्याओं के अंशों का गुणनफल अंशस्थान में रखो और छेदों का गुणनफल छेदस्थान में रखो। तब जो भिन्नसंख्या होगी वही अभीष्ट गुणनफल होगा। अंश और छेद दोनों में किसी एक संख्या का निःशेष भाग लगता हो तो उन अंश और छेद दोनों को काट कर तब यह क्रिया करनी चाहिये और उत्तर को लघुतमरूप में लिखना चाहिये।

उदाहरण (३) $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, $१\frac{५}{६}$ इनका गुणनफल करो।

यहां $१\frac{५}{६} = \frac{११}{६}$, तब

$\frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \times \frac{११}{६} = \frac{१ \times १ \times ११}{३ \times २ \times २} = \frac{११}{१२}$ उत्तर,

नोट—काटने में यदि सभी अंश और छेद कट जाँय तो उत्तर में १ लिखना चाहिये। शून्य को कभी न लिखना चाहिये। और काटने में जहां १ लब्धि आती है उसको उस कटे हुए अङ्क पर प्रायः नहीं लिखते हैं।

उदाहरण (४) $\frac{८}{५}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{३}{४}$ इनका गुणनफल करो ।

यहां $\frac{८}{५} \times \frac{५}{६} \times \frac{३}{४} = \frac{१ \times १ \times १}{१ \times १ \times १} = \frac{१}{१} = १$ उत्तर,

नोट—अभागजाति भिन्न में 'का' इसका अर्थ गुणन होता है। जैसे, $\frac{१}{२}$ $\frac{१}{८} = \frac{१}{२} \times \frac{१}{८} = \frac{१}{१६}$, यहां यदि हम रुपया इस परिमाण को लें तो १ रुपये $\frac{१}{२}$ = ८ आने, और ८ आ० का $\frac{१}{८}$ अर्थात् ८ आ० इस परिमाण के ८ समान भा करके उनमें से एक भाग का मान १ आना है जो कि १ रुपये का $\frac{१}{१६}$ भाग है।

उदाहरणमाला (१४)

गुणा दो

(१) $\frac{२}{१५}$ को ३, ५, ६ और १० से　(२) $\frac{७१}{९०}$ को ४, ५, ८ और ९
(३) $\frac{५९}{३६}$ को ९, १२, १८ और २४ से (४) $\frac{१७}{२५}$ को १५, ३५, ७५ और १००
(५) $\frac{३५}{६४}$ को ८, २४, ३६ और ११२ से　(६) ३$\frac{१}{३}$ को ४
(७) ९$\frac{९}{१०}$ को २९ से　(८) ९९$\frac{७}{५०}$ को ३२ से　(९) ९९$\frac{३९}{५००}$ को ९
(१०) ३१९$\frac{७२९}{७३०}$ को २० से

इनका मान निकालो

(११) $\frac{१}{३} \times \frac{१}{४}$　(१२) $\frac{१५}{२२} \times \frac{११}{१२}$　(१३) १$\frac{७}{८} \times \frac{४}{५}$　(१४) $\frac{८}{९} \times$ ४
(१५) ३$\frac{१}{५} \times$ २$\frac{१}{२}$　(१६) ३$\frac{१}{२} \times$ ४$\frac{१}{३} \times$ ५$\frac{१}{४}$　(१७) $\frac{१०}{३३} \times \frac{२१}{२६} \times \frac{६}{७}$
(१८) $\frac{३५}{७२} \times \frac{१३६}{१९५} \times \frac{१४३}{३२३} \times \frac{१७१}{३०८}$　(१९) $\frac{३}{४} \times \frac{७}{८} \times \frac{१०}{९} \times \frac{४}{२५} \times$ १
(२०) २$\frac{१}{२}$ का ३$\frac{१}{४} \times$ १$\frac{१}{५}$ का २$\frac{२}{१३} \times$ १$\frac{१}{३}$

(२१) एक मनुष्य १ घण्टे में २$\frac{३}{५}$ मील चलता है तो १०$\frac{१}{२}$ घण्टे में कितन चलेगा ?

(२२) एक मनुष्य एक काम को १२ घण्टे में और दूसरा १० घण्टे में पू करता है। यदि दोनों मनुष्य एक साथ काम करें तो ४ घण्टे में वे काम का कौ सा हिस्सा समाप्त करेंगे ?

(२३) एक हौज एक पाइप से २६ घण्टे में और दूसरे से ४८ घण्टे में पू भर जाता है। यदि दोनों पाइप एक साथ खोल दिये जांय तो १६ घण्टे में हौ का कौन सा हिस्सा खाली रह जायगा ?

(२४) एक मेज का मूल्य १०$\frac{३}{१६}$ रु० है और एक कुर्सी का मूल्य उसका आधा है, तो १६ मेजें और ३२ कुर्सियां कितने में आयेंगी।

(२५) यह नीचे गुणन चक्र दिया है, इसमें हर एक खडी, आडी वा तिरछी पङ्क्ति की भिन्न संख्याओं का गुणनफल $\frac{१२५}{२१६}$ यही होता है। इस प्रकार इसमें गुणन के आठ उदाहरण हैं।

$\frac{१२५}{१६२}$	$\frac{५१०३}{५०००}$	$\frac{१२५०}{१७०१}$
$\frac{५०}{६३}$	$\frac{५}{६}$	$\frac{७}{८}$
$\frac{१८९}{२००}$	$\frac{३१२५०}{४५९२७}$	$\frac{९}{१०}$

भिन्नसंख्याओं का भाग

(१२४) भाजक के अंश को छेद के स्थान में और छेद को अंश के स्थान में रखो अर्थात् भाजक की भिन्न को व्युत्क्रमभिन्न में परिवर्तित करो। तब भाज्य और उलटाया हुआ भाजक इनका भिन्नसंख्या के गुणनविधि के अनुसार गुणन करो। जो गुणनफल होगा वही अभीष्ट लब्धि होगी। यदि भाजक की अभिन्न संख्या हो तो उसके नीचे १ छेद रख कर उसको उलट दो। तब भाज्य और भाजक का गुणन करो। यहां पर भी लाघव के लिये संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न में परिवर्तित करो। और उत्तर को लघुतम रूप में लिखो।

उदाहरण (१) $\frac{३}{७}$ को २ से भाग दो।

यहां $२ = \frac{२}{१}$,

$\therefore \frac{३}{७} \div \frac{२}{१} = \frac{३}{७} \times \frac{१}{२} = \frac{३}{१४}$ उत्तर,

क्योंकि, $\frac{३}{७} = \frac{३\times२}{७\times२}$ (१०९) प्र० से,

$\therefore \frac{३}{७} \div २ = \frac{३\times२}{७\times२} \div २ = \frac{३\times२\div२}{७\times२}$ (१११) प्र० से,

अतः $\frac{३}{७} \div २ = \frac{६\div२}{७\times२} = \frac{३}{१४}$ इस तरह यह ऊपर का नियम सिद्ध होता है।

उदाहरण (२) $\frac{३}{५}$ में $\frac{२}{७}$ का भाग दो।

$\frac{३}{५} \div \frac{२}{७} = \frac{३}{५} \times \frac{७}{२} = \frac{२१}{१०} = २\frac{१}{१०}$ उत्तर,

यहां ($\frac{३}{५} \div \frac{२}{७}$) इस लब्धि का ७ वा हिस्सा ($\frac{३}{५} \div २$) यह लब्धि है। क्योंकि $\frac{२}{७}$ इससे २ सात गुने हैं। और भाजक जैसा जैसा कम वा अधिक होता है वैसी लब्धि क्रम से अधिक वा कम होती है। इसी नियम से $\frac{३}{५}$ में २ का भाग

देने से जो लब्धि होगी उससे सात गुनी लब्धि $\frac{३}{५}$ में $\frac{२}{७}$ का भाग देने से होगी। अब, उदाहरण (१) के अनुसार,

$\frac{३}{५} \div २ = \frac{३}{५\times२}$, इस लिये $\frac{३}{५\times२}$ इसको ७ से गुणने पर अभीष्ट लब्धि होगी।

परन्तु $\frac{३}{५\times२} \times ७ = \frac{३\times७}{५\times२}$ (११०) प्रक्रम से,

$\therefore \frac{३\times७}{५\times२} = \frac{२१}{१०} = २\frac{१}{१०}$ = अभीष्ट लब्धि होती है।

(१२५) किसी भिन्नसंख्या में दूसरी भिन्नसंख्या वा अभिन्नसंख्या का भाग देने से अथवा किसी भिन्नसंख्या का दूसरी भिन्नसंख्या वा अभिन्नसंख्या में भाग देने से जो लब्धि होती है उसको मिश्रभिन्न कहते हैं अर्थात् जिस भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों वा दो में से कोई एक भागजाति भिन्न, प्रभागजाति भिन्न वा संयुक्तभिन्न होता है उसको मिश्रभिन्न कहते हैं, यह (११२) प्रक्रम में कहा जा चुका है। अब मिश्रभिन्न को भाग जाति भिन्न का रूप देने में वही क्रिया करनी पड़ती है जो क्रिया एक भिन्न का दूसरी भिन्न में भाग देने से करनी पड़ती है। यहां मिश्रभिन्न के अंशस्थान में वा छेदस्थान में कोई अभिन्नसंख्या हो तो उसके नीचे १ छेद रख कर गणित करना चाहिये। यह सब विषय नीचे के उदाहरणों से स्पष्ट होगा।

जैसे, (१) $\frac{\frac{३}{५}}{\frac{९}{१०}} = \frac{३}{५} \div \frac{९}{१०} = \frac{३}{५} \times \frac{१०}{९} = \frac{२}{३}$,

(२) $\frac{५\frac{१}{३}}{८} = \frac{\frac{१६}{३}}{\frac{८}{१}} = \frac{१६}{३} \div \frac{८}{१} = \frac{१६}{३} \times \frac{१}{८} = \frac{२}{३}$,

(३) $\frac{२}{३\frac{१}{७}} = \frac{\frac{२}{१}}{\frac{२२}{७}} = \frac{२}{१} \div \frac{२२}{७} = \frac{२}{१} \times \frac{७}{२२} = \frac{७}{११}$,

(४) $\frac{८ - \frac{१}{७}}{९ + \frac{१}{२}} = \frac{\frac{५६}{७} - \frac{१}{७}}{\frac{१८}{२} + \frac{१}{२}} = \frac{\frac{५६-१}{७}}{\frac{१८+१}{२}} = \frac{\frac{५५}{७}}{\frac{१९}{२}} = \frac{५५}{७} \div \frac{१९}{२} = \frac{५५}{७} \times \frac{२}{१९} = \frac{११०}{१३३}$

(५) $\frac{\frac{५}{८}\text{का}२१\frac{१}{३}}{२\frac{१}{१६}} = \frac{\frac{५}{८} \times \frac{६४}{३}}{\frac{३३}{१६}} = \frac{\frac{४०}{३}}{\frac{३३}{१६}} = \frac{४०}{३} \div \frac{३३}{१६} = \frac{४०}{३} \times \frac{१६}{३३} = \frac{६४०}{९९}$ = $६\frac{४६}{९९}$, इत्यादि।

उदाहरणमाला (१५)

भाग दो

(१) ८ में $\frac{६}{७}$ का (२) $१३\frac{१}{३}$ में $\frac{५}{९}$ का (३) $\frac{५}{६}$ में $\frac{३}{४}$ का (४) $१०\frac{१}{२}$ में $७\frac{३}{४}$ का (५) $\frac{३२}{६३}$ में $\frac{१६}{३०}$ का (६) $\frac{४२९}{५३२}$ में $\frac{३२६}{३६८}$ का (७) $\frac{६३६}{५५५}$ में $\frac{६}{१११}$ का (८) $\frac{५४३}{६७२}$ में $\frac{१८१}{५९२}$ का (९) ४३२ में $\frac{१४४}{१७९}$ का (१०) $१७\frac{३}{५}$ में ($५-\frac{२}{७}$) का (११) $\frac{८}{९}$ में ($\frac{३}{४}$ का $\frac{५}{६}$) का (१२) ($१७-\frac{४}{५}$) में ($८-\frac{२}{७}$) का (१३) ($१-\frac{७}{१२}$) में ($\frac{१५}{१६}$ का $\frac{८}{९}$) का (१४) ($\frac{३}{४}+\frac{४}{५}$) में ($\frac{२}{३}+\frac{५}{६}$) का (१५) ($\frac{३}{७}$ का $\frac{५}{९}$) में ($\frac{१}{२}$ का $\frac{३}{४}$ का $\frac{५}{६}$) का

(१६) वह कौन संख्या है? जिसको $२\frac{७}{१९}$ से गुण दो तो गुणनफल $१३\frac{५}{७}$ होता है।

(१७) १२ जिसका $\frac{४}{५}$ होता है वह संख्या कौन है ?

(१८) २० जिसका $२\frac{१}{३}$ होता है वह कौन संख्या है ?

(१९) $३\frac{३}{५}$ जिसका $१\frac{२}{७}$ होता है वह संख्या कौन है ?

(२०) $१\frac{१}{२}$ रु० में एक पुस्तक मिलता है तो $१३\frac{१}{२}$ रु० में कितनी पुस्तकें मिलेंगी ?

(२१) एक घोड़े का मूल्य $८\frac{९}{१०}$ पौं० है तो $१५१\frac{३}{१०}$ पौं० में कितने घोड़े मिलेंगे ?

(२२) एक रेलगाड़ी एक घण्टे में $२७\frac{३}{४}$ मील जाती है तो १४८ मील कितने घण्टों में जायेगी ?

(२३) एक पहिये का परिधि $१\frac{५}{६}$ गज हो तो $२\frac{१}{२}$ मील जाने में वह पहिया कितने चक्कर करेगा ?

इनको सरल करो।

(२४) $\frac{\frac{१}{२}}{\frac{२}{३}}$ (२५) $\frac{७}{\frac{३}{४}}$ (२६) $\frac{\frac{५}{८}}{३}$ (२७) $\frac{३\frac{१}{४}}{५}$ (२८) $\frac{७}{४\frac{२}{३}}$

(२९) $\frac{६-\frac{३}{४}}{७}$ (३०) $\frac{\frac{४}{५}\text{ का }\frac{३}{८}}{९}$ (३१) $\frac{१४}{७\text{ का }\frac{८}{९}}$ (३२) $\frac{\frac{३}{४}\text{ का }\frac{४}{५}\text{ का }\frac{५}{७}}{२\frac{११}{१४}}$

(३३) $\frac{५\frac{२}{७}+४\frac{५}{९}}{७\frac{२}{९}+२\frac{१०}{२१}}$ (३४) $\frac{१०\frac{५}{९}-३\frac{२}{५}}{४\frac{१}{७}-२\frac{११}{१५}}$ (३५) $\frac{३\frac{१}{२}-१}{१५\frac{१}{३}+५\frac{१}{२}-३\frac{१}{२}} \div \frac{१-\frac{३}{४}}{१+\frac{३}{४}}$

भिन्नसंख्याओं का महत्तमसमापवर्तक

(१२६) दो वा अधिक भिन्न संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक वह भिन्न संख्या होती है जिसका अंश दी हुई संख्याओं के अंशों का महत्तमसमापवर्तक हो[illegible] है और उसका छेद उनके छेदों का लघुतमसमापवर्त्य होता है। इसलिये दी[illegible] भिन्नों के अंशों के महत्तमसमापवर्तक को अंशस्थान में और उनके छेदों के ल[illegible] तमसमापवर्त्य को छेदस्थान में रखने से जो भिन्नसंख्या बनेगी वही दी [illegible] भिन्नसंख्याओं का महत्तमसमापवर्तक होगा। यदि दी हुई भिन्नों में कोई संयु[illegible] भिन्न हो तो उसको विषमभिन्न का रूप दे कर और कोई भिन्न अपने लघुतम [illegible] में न हो तो उसको लघुतम रूप दे कर तब यह क्रिया करनी चाहिये।

उदाहरण, $\frac{८}{१५}$, $\frac{२४}{२५}$, $\frac{३२}{४५}$ इनका महत्तमसमापर्तक क्या होगा ?

यहां दी हुई भिन्नें अपने लघुतम रूप में ही हैं इसलिये उनको लघुतम [illegible] देने का प्रयोजन नहीं।

अब ८, २४, ३२ इन अंशों का महत्तमसमापवर्तक = ८, और १५, २५, ४[illegible] इन छेदों का लघुतमसमापवर्त्य = २२५,

अतः $\frac{८}{२२५}$ यह निर्दिष्ट संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक है।

उदाहरणमाला (१६)

इनका महत्तमसमापवर्तक निकालो

(१) $\frac{४}{५}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{८}{१०}$ (२) $\frac{३}{४}$, $\frac{२१}{३३}$ $\frac{९}{२२}$, (३) $\frac{८}{९}$, $\frac{१२}{२४}$, $\frac{४८}{६३}$ (४) $\frac{१२}{१५}$, $\frac{१७}{२०}$, $\frac{२५}{३०}$, (५) $३\frac{१}{२}$, $५\frac{१}{४}$, $\frac{१}{१२}$, (६) ३, $\frac{९}{२}$, $१०\frac{१}{२}$ (७) $\frac{१८}{२५}$, [illegible] $\frac{२४}{३६}$, $\frac{४८}{६०}$, $\frac{६०}{७२}$ (८) $\frac{९}{१२}$, $\frac{१३}{१५}$, $\frac{१५}{१८}$, $\frac{१८}{२१}$ (९) $१८\frac{२}{३}$, $१८\frac{९}{१०}$, १[illegible] $२२\frac{१०}{११}$, $२५\frac{११}{१३}$

(१०) एक ढेरी में $२७\frac{१}{२}$ सेर गेहूं, दूसरी ढेरी में $२८\frac{७}{८}$ सेर गेहूँ औ[illegible] तीसरी में $२२\frac{१}{१२}$ से० गेहूं है, बताओ बड़ी से बड़ी कितने सेर की टोकरी हो सक[illegible] है जिससे तीनों ढेरियां पूरी पूरी नापी जा सकें।

भिन्नसंख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य

(१२७) दो वा अधिक भिन्नसंख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य वह भिन्न[illegible] संख्या होती है जिसका अंश दी हुई भिन्नों के अंशों का लघुतमसमापवर्त्य औ[illegible] उसका छेद दी हुई भिन्नों के छेदों का महत्तमसमापवर्तक होता है। इसलिये [illegible]

हुई भिन्नों के अंशों के लघुतमसमापवर्त्य को अंशस्थान में और उनके छेदों के महत्तमसमापवर्तक को छेदस्थान में रखने से जो भिन्नसंख्या बनेगी वही दी हुई भिन्नों का लघुतमसमापवर्त्य होगा। यहां संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न का रूप दे कर और कोई भिन्नसंख्या अपने लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप दे कर तब यह क्रिया करनी चाहिये।

उदाहरण, $\frac{४}{२१}$, $\frac{५}{२८}$, $\frac{६}{४९}$, इनका लघुतमसमापवर्त्य क्या होगा?

यहां ४, ५, ६, इन अंशों का लघुतमसमापवर्त्य = ६० और २१, २८, ४९ इन छेदों का महत्तमसमापवर्तक = ७ है,

अतः $\frac{६०}{७}$ यह निर्दिष्ट संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य है।

उदाहरणमाला (१७)

इनका लघुतमसमापवर्त्य निकालो

(१) $\frac{८}{२५}$, $\frac{४}{१५}$, $\frac{९}{२०}$ (२) $\frac{२}{७}$, $\frac{४}{२१}$, $\frac{५}{३५}$ (३) $\frac{१२}{१५}$, $\frac{२१}{२४}$, $\frac{२५}{४५}$ (४) $\frac{५}{६}$, $\frac{३६}{४२}$, $\frac{९}{१२}$, $\frac{५}{१८}$ (५) $\frac{७}{११}$, $\frac{३३}{४४}$, $\frac{९}{५५}$, $\frac{२}{३३}$, $\frac{२}{७७}$ (६) $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{८}{९}$ (७) १$\frac{५}{२८}$, ३$\frac{२}{२१}$, ३$\frac{१}{७}$ (८) $\frac{४}{६}$, $\frac{१५}{१८}$, $\frac{३२}{३६}$, $\frac{७७}{८४}$ (९) १$\frac{३७}{७८}$, ३$\frac{५}{५२}$, २$\frac{५४}{६५}$, ७$\frac{२५}{२६}$, ५$\frac{३५}{३९}$

(१०) एक गोलार्द्ध के क्षेत्र की चारो ओर तीन मनुष्यों ने एक ही समय में दौड़ना शुरू किया, पहिला मनुष्य २$\frac{१}{४}$ मिनिट में, दूसरा ३$\frac{३}{८}$ मि० में और तीसरा ५$\frac{५}{१६}$ मि० में उस गोलार्द्ध की चारो ओर दौड़ जाता है, बताओ पहिली बार वे सब एक ही स्थान पर एक साथ कब मिलेंगे?

कोष्ठों का प्रयोग

(१२८) प्रायः ——, ( ), { }, [ ] इन चार कोष्ठों का ही प्रयोग किया जाता है। इनमें आडी लकीर वाले पहिले कोष्ठ को **शृङ्खल** कहते हैं। और इस आडी रेखा को भिन्नसंख्याओं के अंशों के ऊपर $\overline{\frac{१}{५}+\frac{१}{७}+\frac{१}{३}-\frac{१}{४}}$, इस तरह लिखते हैं। दूसरे कोष्ठ को **लघुकोष्ठ**, तीसरे कोष्ठ को **मध्यमकोष्ठ** और चौथे को **बृहत्कोष्ठ** कहते हैं। इनमें से प्रत्येक कोष्ठ अपने भीतर की सब संख्याओं से बने हुए एक पद को सूचित करता है। इस लिये जिस स्वरूप में कोष्ठ का भी प्रयोग होता है उस स्वरूप को सरल करने में, अर्थात् योग, अन्तर आदि की क्रिया से उस स्वरूप को सङ्क्षिप्तरूप देने में, पहिले

कोष्ठ के भीतर की सब संख्याओं को सरल करके कोष्ठ को दूर करना चाहिये त
अन्य पदों को सरल करना चाहिये ।

(१२९) अब $\frac{१}{४} - \frac{१}{८} + \frac{१}{१६}$ इस स्वरूप का मान निकालने में हम (२५
प्रक्रम के नियम के अनुसार $\frac{१}{४}$ और $\frac{१}{१६}$ इन दो धनपदों के योग में $\frac{१}{८}$ इस ऋ
पद को घटाते हैं । तब $\frac{३}{१६}$ यह उक्त स्वरूप का मान आता है । परन्तु य
$\frac{१}{४}$ में $\frac{१}{८}$ और $\frac{१}{१६}$ इन दो पदों का योग घटाना हमको अभीष्ट हो तो यह उ
स्वरूप से प्रकट नहीं हो सकता है । इसको प्रकट करने के लिये हमको कोष्ठ
प्रयोग करना पड़ेगा । और जब हम उक्त स्वरूप को $\frac{१}{४} - (\frac{१}{८} + \frac{१}{१६})$
स्वरूप में लिखते हैं तब यह स्पष्ट प्रकाशित होता है कि $\frac{१}{४}$ में $\frac{१}{८}$ और $\frac{१}{१६}$
योगफल घटाना है । और इस प्रकार क्रिया करने से, अर्थात् पहिले कोष्ठ के भी
की भिन्नों को सरल करके तब अन्य पदों को सरल करने से, $\frac{१}{१६}$ यह हमा
अभीष्ट उत्तर आता है । यहां $\frac{१}{८}$ यह भिन्न धन समझी जाती है । यदि ऋ
समझी जाय तो उसका और $\frac{१}{१६}$ इसका योग न हो सकेगा । अब यदि उक्त ती
भिन्नों का $\frac{१}{१६}$ यही मान हमको अभीष्ट हो तो हम उक्त स्वरूप को बिना कोष्ठ
सहायता $\frac{१}{४} - \frac{१}{८} - \frac{१}{१६}$ ऐसा लिख सकते हैं । जिसका (२५) प्रक्रम से $\frac{१}{१६}$ य
मान होगा । इससे यह नियम निकलता है कि कोष्ठ के बाहर यदि ऋण चिह्न
तो उस कोष्ठ के भीतर की संख्याओं के धन चिह्न को ऋण चिह्न में और ऋण चि
को धन चिह्न में बदल कर हम कोष्ठ को दूर कर सकते हैं । परन्तु कोष्ठ के बाह
यदि धन चिह्न हो तो भीतर की संख्याओं के धन ऋण चिह्न बदले नहीं जाते है
जैसे, $\frac{१}{१६} + (\frac{१}{४} - \frac{१}{८})$ इस स्वरूप के अनुसार पहिले $\frac{१}{४}$ में $\frac{१}{८}$ को घटा कर शे
को $\frac{१}{१६}$ में जोड़ना चाहिये । जिससे $\frac{३}{१६}$ यह उक्त स्वरूप का मान होता है । य
मान उक्तस्वरूप को कोष्ठके बिना $\frac{१}{१६} + \frac{१}{४} - \frac{१}{८}$ इस तरह लिखने से भी आता है

उदाहरण (१) $३\frac{१}{२} - (२\frac{१}{३} + \frac{१}{६})$ इसको संक्षिप्त रूप दो ।

दी हुई भिन्न $= ३\frac{१}{२} - (२\frac{१}{३} + \frac{१}{६})$

$= \frac{७}{२} - (\frac{७}{३} + \frac{१}{६})$

$= \frac{७}{२} - (\frac{१४+१}{६})$

$= \frac{७}{२} - \frac{१५}{६}$ कोष्ठ को दूर करने से,

$= \frac{२१-१५}{६}$

$= \frac{६}{६} = १$ उत्तर

ऊपर के उदाहरण में (१२८) प्रक्रम के अनुसार कोष्ठ के भीतर की भिन्नों को पहिले सरल कर के तब कोष्ठ दूर किया गया है। अब (१२९) प्रक्रम के अनुसार उक्त उदाहरण में कोष्ठ के बाहर ऋण चिह्न होने से कोष्ठ के भीतर की भिन्नों के चिह्न बदल कर पहिले कोष्ठ को दूर किया है। तब उन भिन्न संख्याओं को सरल कर के उक्त उदाहरण का उत्तर नीचे कर के दिखलाया गया है। जैसे,

दी हुई भिन्न $= ३\frac{१}{२} - \left(२\frac{१}{३} + \frac{१}{६} \right)$

$= \frac{७}{२} - \left(\frac{७}{३} + \frac{१}{६} \right)$

$= \frac{७}{२} - \frac{७}{३} - \frac{१}{६}$ चिन्हों को बदल कर कोष्ठ दूर करने से,

$= \frac{२१-१४-१}{६}$

$= \frac{२१-१५}{६}$

$= \frac{६}{६} =$ १ उत्तर

(१३०) कोष्ठ के भीतर की सब संख्याएं मिल कर एक पद होता है, इस एक ही अर्थ को सूचित करने के लिये चार प्रकार के कोष्ठ कल्पना करने का प्रयोजन यह है कि जब एक ही प्रकार के कोष्ठ का काम होता है तो प्रायः ( ) इसी लघुकोष्ठ को लिखते हैं। और जब एक के बाहर एक ऐसे अनेक कोष्ठों का काम होता है तब कौन कोष्ठ कहां समाप्त भया इसका ज्ञान होने में कठिनता होगी। और भिन्न-भिन्न कोष्ठों की कल्पना करने से वह कठिनता नहीं होती है। जैसे,

$५\frac{१}{२} - \left[\frac{१}{३} - \left\{ \frac{१}{६} - \left(\frac{१}{७} - \overline{\frac{१}{२०} + \frac{१}{४०}} \right) \right\} \right]$ इस स्वरूप से यह स्पष्ट मालूम होता है कि $\frac{१}{२०}$ और $\frac{१}{४०}$ इनके योग को $\frac{१}{७}$ में घटा कर जो शेष होगा उसको $\frac{१}{६}$ में घटाना है। फिर यहां जो शेष होगा उसको $\frac{१}{३}$ में घटा कर शेष को $५\frac{१}{२}$ में घटाना है। यदि एक ही प्रकार के यहां सब कोष्ठ हों तो इस अर्थ की प्रतीति उतनी सुगमता से न हो सकेगी। अब इससे यह नियम निकलता है कि यदि चारों प्रकार के कोष्ठों को दूर करना हो तो पहिले सब से छोटे शृङ्खल कोष्ठ को दूर करना चाहिये। उसके बाद उससे बड़े लघु कोष्ठ को, तब मध्यम कोष्ठ को और अन्त में बृहत्कोष्ठ को दूर करना चाहिये। इसी क्रम से सब कोष्ठों को दूर करना चाहिये।

उदाहरण (२) $\frac{११}{१६} \div \left[\frac{३}{४} - \left\{ \frac{३}{१६} \div \left(७\frac{१}{२} \times \overline{\frac{१}{३०} + \frac{१}{६०}} \right) \right\} \right]$ इसको सरल करो।

दी हुई मिश्र $= \frac{११}{१६} \div \left[\frac{३}{४} - \left\{ \frac{३}{१६} \div \left(७\frac{१}{२} \times \overline{\frac{१}{३०} + \frac{१}{६०}} \right) \right\} \right]$

$= \frac{११}{१६} \div \left[\frac{३}{४} - \left\{ \frac{३}{१६} \div \left(\frac{१५}{२} \times \frac{\overline{२+१}}{६०} \right) \right\} \right]$

$= \frac{११}{१६} \div \left[\frac{३}{४} - \left\{ \frac{३}{१६} \div \left(\frac{१५}{२} \times \frac{३}{\cancel{६०}_{४}} \right) \right\} \right]$ शृङ्खलकोष्ठ के दूर करने से,

$= \frac{११}{१६} \div \left[\frac{३}{४} - \left\{ \frac{३}{१६} \div \frac{३}{८} \right\} \right]$ लघुकोष्ठ को दूर करने से,

$= \frac{११}{१६} \div \left[\frac{३}{४} - \left\{ \frac{\cancel{३}}{\cancel{१६}_{२}} \times \frac{\cancel{८}}{\cancel{३}} \right\} \right]$

$= \frac{११}{१६} \div \left[\frac{३}{४} - \frac{१}{२} \right]$ मध्यमकोष्ठ को दूर करने से,

$= \frac{११}{१६} \div \left[\frac{३-२}{४} \right]$

$= \frac{११}{१६} \div \frac{१}{४}$ बृहत्कोष्ठ को दूर करने से,

$= \frac{११}{\cancel{१६}_{४}} \times \frac{\cancel{४}}{१}$

$= \frac{११}{४} = २\frac{३}{४}$ उत्तर.

नोट—जब किसी कोष्ठ के बाहर ऋण चिह्न होता है और उस कोष्ठ के भीतर की संख्याओं को सरल करने पर उनका मान ऋण आता है तब उस कोष्ठ को दूर करते समय उस ऋण मान की बांई ओर ऋण चिह्न को न लिख कर धन चिह्न लिखना चाहिये। और यदि किसी कोष्ठ के बाहर धन चिह्न हो और उस कोष्ठ के भीतर की संख्याओं को सरल करने पर उनका मान ऋण हो तो उस कोष्ठ को दूर करने में उस ऋण मान के पहिले धन चिह्न न लिख कर ऋण चिह्न ही लिखना चाहिये।

उदाहरण (३) $१\frac{७}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} - \left(\frac{१}{८} - \frac{१}{४} \right) \right\}$ इसका मान निकालो।

दिया हुआ स्वरूप $= १\frac{७}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} - \left(\frac{१}{८} - \frac{१}{४} \right) \right\}$

$= \frac{१९}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} - \left(\frac{१-२}{८} \right) \right\}$

$= \frac{१९}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} - \left(-\frac{१}{८} \right) \right\}$

$= \frac{१९}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} + \frac{१}{८} \right\}$ लघुकोष्ट दूर करने से,

$= \frac{१९}{१२} \div \left\{ \frac{१६+३}{२४} \right\}$

$= \frac{१९}{१२} \div \frac{१९}{२४}$ मद्धयमकोष्ठ दूर करने ,से

$= \frac{११}{१२} \times \frac{२४}{११} = २$ उत्तर.

यहां लघुकोष्ठ के भीतर की $\frac{१}{८}$ और $\frac{१}{४}$ इन भिन्नों में $\frac{१}{८}$ में $\frac{१}{४}$ को घटाने से $-\frac{१}{८}$ यह ऋण अन्तर होता है, परन्तु उस लघु कोष्ठ के बाहर ऋण चिह्न होने से $\frac{१}{८}$ की बांई ओर ऋण चिह्न न लिख कर घन चिह्न लिखा है। और यहां लघु और मध्यम यही दो प्रकार के कोष्ठ हैं इसलिये क्रमानुसार पहिले लघु फिर मध्यम कोष्ठ को दूर किया गया है।

उदाहरण (४) $११ \div \{ १ + (\frac{१}{६} + \overline{\frac{१}{४} - \frac{१}{२}}) \}$ इसको सरल करो।

दिया हुआ स्वरूप $= ११ \div \{ १ + (\frac{१}{६} + \overline{\frac{१}{४} - \frac{१}{२}}) \}$

$= ११ \div \{ १ + (\frac{१}{६} + \overline{\frac{१-२}{४}}) \}$

$= ११ \div \{ १ + (\frac{१}{६} - \frac{१}{४}) \}$ श्रृंखल कोष्ठ को दूर करने से,

$= ११ \div \{ १ + (\frac{२-३}{१२}) \}$

$= ११ \div \{ १ - \frac{१}{१२} \}$ लघुकोष्ठ को दूर करने से,

$= ११ \div \{ \frac{१२-१}{१२} \}$

$= ११ \div \frac{११}{१२}$ मध्यमकोष्ठ को दूर करने से,

$= \frac{११ \times १२}{११} = १२$ उत्तर.

यहां श्रृंखल कोष्ठ के भीतर के $\frac{१}{४}$ में $\frac{१}{२}$ को घटाने से $-\frac{१}{४}$ यह ऋण शेष बचा, इसलिये उस कोष्ठ के बाहर घन चिह्न होने पर भी $\frac{१}{६}$ में $\frac{१}{४}$ को घटाया, तब $-\frac{१}{१२}$ यह ऋण शेष बचा, इसलिये कोष्ठ के बाहर धन चिह्न यहां पर भी होने से १ में $\frac{१}{१२}$ को घटाया है। और यहां क्रम के अनुसार पहिले श्रृंखल कोष्ठ को, तब लघु कोष्ठ को और तब मध्यम कोष्ठ को दूर किया है।

(१३१) यदि किसी कोष्ठ के पहिले कोई चिह्न न हो तो उस कोष्ठ के पहिले गुणन चिह्न समझ कर तदनुसार क्रिया करनी चाहिये।

उदाहरण (५) $१\frac{७}{९} (\frac{१}{२} + \frac{१}{४}) (\frac{३}{४} - \frac{१}{२})$ इसको संक्षिप्त रूप में लिखो।

दिया हुआ स्वरूप $= १\frac{७}{९} (\frac{१}{२} + \frac{१}{४}) (\frac{३}{४} - \frac{१}{२})$

$= \frac{१६}{९} \times (\frac{२+१}{४}) \times (\frac{३-२}{४})$

$= \frac{१६}{९} \times \frac{३}{४} \times \frac{१}{४}$

$= \frac{१}{३}$ उत्तर.

यहां दोनों लघुकोष्ठों के बीच में और $१\frac{८}{९}$ इसके और पहिले कोष्ठ के बीच में कोई चिह्न न होने से वहां गुणन चिह्न रख कर उत्तर निकाला गया है।

उदाहरणमाला (१८)

इनको सरल करो

(१) $\frac{१}{२}-\left(\frac{३}{४}-\frac{१}{४}\right)$　(२) $\frac{१}{४}\left(\overline{\frac{५}{६}+\frac{२}{८}}-\frac{१}{३}\right)$

(३) $\left(३+\frac{१}{४}\right)\div\frac{५}{७}\left(\frac{१}{३}-\frac{१}{६}\right)$

(४) $२\frac{१}{२}+\left(\frac{७}{८}-\frac{३}{४}\right)\left(\frac{५}{६}-\frac{१}{६}\right)$

(५) $\frac{७}{८}+\left\{\frac{३}{४}-\left(\frac{१}{२}\text{ का }\frac{२}{३}-\frac{१}{३}\right)\right\}$

(६) $१\frac{२}{३}-\left[७\frac{१}{८}-\left\{१\frac{१}{१०}\left(-३\frac{१}{३}+६\frac{२}{३}+५\right)\right\}\right]$

(७) $९\frac{१}{२}+\left[७\frac{१}{२}-\left\{\frac{१}{४}\div\left(\frac{१}{२}-\frac{१}{४}\right)\right\}\right]$

(८) $७-\left[\frac{३}{४}+\left\{२\frac{१}{२}-\left(\frac{१}{२}\text{ का }\overline{\frac{१}{६}-\frac{१}{७}}\right)\right\}\right]$

(९) $\frac{१}{६}+\left[२\frac{१}{३}\div\left\{\frac{३}{४}-\frac{१}{२}\left(\frac{२}{३}-\frac{१}{८}\right)\right\}\right]$

(१०) $५\frac{१}{२}-\left[३-\frac{१}{८}\left\{७-\frac{१}{३}\left(\frac{३}{४}\text{ का }\frac{८}{९}\right)\right\}\right]$

(११) $६-\left[३-\frac{१}{४}\left\{३\frac{१}{२}-\left(४\div\overline{३-\frac{१}{२}}\right)\right\}\right]$

(१२) $\frac{१२}{४७}\left[५\frac{१}{२}-\left\{\frac{१}{४}+\frac{८}{११}\left(\overline{\frac{१}{२}-\frac{१}{३}}+१\frac{२}{३}\right)\right\}\right]$

(१३) $\left[\frac{९}{१०}\div\left\{\overline{\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{४}{५}}\div२\frac{१}{३}\left(१\frac{१}{७}\div\frac{१}{७}\right)\right\}\right]$

(१४) $\left[\frac{१}{११}\text{ का }५\frac{१}{२}\left\{\frac{९}{१०}\text{ का }१\frac{१}{९}\left(\frac{१}{४}\times२\frac{२}{३}\times१\frac{१}{२}\right)\right\}\right]$

(१५) $३\frac{११}{२३}\times\left[२-\left\{\frac{१}{८०}+\left(\overline{\frac{१}{४०}+\frac{१}{२०}}-\frac{१}{१०}\right)\right\}\right]$

विततभिन्न वा वर्द्धितभिन्न

(१३२) जिस भागजाति भिन्न संख्या को वितत अर्थात् फैलाना हो वह भागजाति भिन्न यदि समभिन्न हो (अर्थात् उसका अंश छेद से छोटा हो) तो उसके अंश और छेद में अंश का भाग दो। और यदि वह भागजाति भिन्न विषम भिन्न हो तो उसको संयुक्तभिन्न का रूप देने से उसमें जो भिन्न अवयव बने उसके अंश और छेद में अंश का भाग दो। तब दोनों प्रकार की संख्याओं के अंशस्थान में १ होगा और छेदस्थान में विषमभिन्न होगी। फिर उस विषमभिन्न को संयुक्तभिन्न का रूप दो और उस संयुक्तभिन्न की भिन्नसंख्या के अंश और छेद में पुनः अंश का भाग दो। ऐसा तब तक करो जब तक छेदस्थान में वही भिन्नसंख्या बार बार आ जाय तब जो उद्दिष्ट भिन्न संख्या का फैला हुआ रूप होगा उसके

विततभिन्न कहते हैं। यहां संयुक्तभिन्न के अभिन्न भाग और भिन्न भाग के बीच में स्पष्टता के लिये धन चिह्न को लिखते हैं। यह विषय नीचे के उदाहरण से स्पष्ट होगा।

उदाहरण (१) $\frac{11}{14}$ इसको विततभिन्न का रूप दो।

यहां $\frac{11}{14} = \frac{1}{\frac{14}{11}} = \frac{1}{1+\frac{3}{11}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{2}{3}}} =$

$\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$, यह $\frac{11}{14}$ का वितत रूप है। इसको विततभिन्न कहते हैं। यहां $1+\frac{1}{2}$ यह अन्तिम संयुक्तभिन्न है। इसका भिन्न भाग $\frac{1}{2}$ इसके अंश और छेद में १ इस अंश का भाग दें तो $\frac{1}{\frac{2}{1}}$ ऐसा रूप होगा जो $\frac{1}{2}$ इसी के बराबर होता है। इसलिये यहीं पर क्रिया समाप्त करनी चाहिये।

उदाहरण (२) $\frac{19}{12}$ इसको विततभिन्न का रूप दो।

यहां $\frac{19}{12} = 1+\frac{7}{12} = 1+\frac{1}{\frac{12}{7}} = 1+\frac{1}{1+\frac{5}{7}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{5}}} =$

$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{2}{5}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{5}{2}}}} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$

यही $\frac{19}{12}$ का वितत रूप है। इसके आगे क्रिया करने से छेदस्थान में $\frac{1}{2}$ यही भिन्न संख्या आवेगी। पहिले उदाहरण में समभिन्न का विततरूप और दूसरे उदाहरण में विषमभिन्न का विततरूप बनाया गया है।

विततभिन्न को उसके मूल भागजाति भिन्न के संक्षिप्त रूप में लाने का प्रकार

(१३३) किसी विततभिन्न को उसके मूल भागजाति भिन्न का संक्षिप्त रूप देने में क्रिया को अन्त से ही प्रारंभ करना चाहिये। इसके उदाहरण के लिये इसके पहले के दूसरे उदाहरण में $\frac{19}{12}$ इस विषमभिन्न का जो वितत रूप दिखलाया गया है उसी वितत रूप को संक्षिप्त रूप देकर $\frac{19}{12}$ इस मूल विषमभिन्न में उसको परिवर्तित कर नीचे दिखलाया जाता है।

उदाहरण (३) $१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२ + \frac{१}{२}}}}$ इसको संक्षिप्त रूप दो।

$$\text{दी हुई भिन्न} = १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२ + \frac{१}{२}}}} = १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{\frac{५}{२}}}}$$

$$= १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \frac{२}{५}}} = १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{\frac{७}{५}}}$$

$$= १ + \cfrac{१}{१ + \frac{५}{७}} = १ + \cfrac{१}{\frac{१२}{७}} = १ + \frac{७}{१२} = \frac{१९}{१२} \text{ उत्तर.}$$

यहां अन्तिम संयुक्त भिन्न $२ + \frac{१}{२}$ यह है, इसका विषमभिन्न का रूप यह है, इसका ऊपर के १ में भाग देने से $\frac{२}{५}$ यह हुआ, अब $१ + \frac{२}{५}$ यह दू संयुक्तभिन्न का रूप है, उसका विषमभिन्न का रूप $\frac{७}{५}$ यह है, इसका ऊपर के १ भाग देने से $\frac{५}{७}$ यह हुआ, अब $१+\frac{५}{७}$ यह तीसरा संयुक्तभिन्न का रूप है, उस विषमभिन्न का रूप $\frac{१२}{७}$ यह है, इसका ऊपर के १ में भाग देने से $\frac{७}{१२}$ हुआ अब चौथी और अन्तिम संयुक्तभिन्न $१+\frac{७}{१२}$ यह है इसको विषमभिन्न का रूप दे से $\frac{१९}{१२}$ यह मूल विषमभिन्न हुई जिसका वर्धित रूप उदाहरण में दिया गया है।

अथवा ऊपर के उदाहरण का उत्तर हम इस तरह भी ला सकते हैं। जैसे,

$$१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२ + \frac{१}{२}}}} = १ + १ \div \left[१ + १ \div \left\{१+१ \div \left(२ + \frac{१}{२}\right)\right\}\right]$$

$$= १ + १ \div \left[१ + १ \div \left\{१ + १ \div \frac{५}{२}\right\}\right]$$

$$= १ + १ \div \left[१ + १ \div \left\{१ + १ \times \frac{२}{५}\right\}\right]$$

$$= १ + १ \div \left[१ + १ \div \left\{१ + \frac{२}{५}\right\}\right]$$

$$= १ + १ \div \left[१ + १ \div \frac{७}{५}\right]$$

$$= १ + १ \div \left[१ + १ \times \frac{५}{७}\right]$$

$$= १ + १ \div \left[१ + \frac{५}{७}\right]$$

$$= १+१ \div \frac{१२}{७} = १+१\times\frac{७}{१२} = १+\frac{७}{१२} = \frac{१९}{१२} \text{ उत्}$$

उदाहरणमाला (१६)

इनको संक्षिप्त रूप दो

(१) $\dfrac{१}{२+\frac{३}{४}}$ (२) $\dfrac{१}{२+\dfrac{१}{३+\frac{१}{४}}}$ (३) $\dfrac{२३}{३-\dfrac{३}{५-\frac{५}{७}}}$

(४) $\dfrac{४४}{११+\dfrac{१}{७+\dfrac{३}{८\frac{१}{४}}}}$ (५) $१+\dfrac{३}{१+\dfrac{३}{१+\frac{१}{२}}}$

(६) $१-\dfrac{२}{८-\dfrac{७}{१+\dfrac{१}{२+\frac{१}{२}}}}$ (७) $\frac{१}{३}+\dfrac{२}{\frac{१}{३}+\dfrac{३}{\frac{१}{४}+\frac{४}{५}}}$

(८) $\frac{१}{४}\div\dfrac{२}{\frac{१}{२}+\dfrac{३}{४+\dfrac{५}{\frac{१}{२}+\frac{३}{२}}}}$

(९) $\dfrac{१}{२-\dfrac{३}{४-\frac{५}{६}}}\times\dfrac{१}{२+\dfrac{३}{४+\frac{५}{६}}}\div५\frac{४}{५}$

(१०) $\left\{\dfrac{२}{३-\dfrac{१}{१-\frac{१}{२}}}-\frac{१}{३}\left(५-\dfrac{२}{\frac{३}{२}-\frac{१}{६}}\right)\right\}\div\dfrac{\frac{१}{२}+\frac{१}{४}}{१\frac{१}{२}}$

(११) $१+\dfrac{१}{३+\dfrac{१}{२+\dfrac{१}{४+\dfrac{१}{१+\frac{१}{५}}}}}$

(१२) $\dfrac{७}{१+\dfrac{६}{१+\dfrac{५}{१+\dfrac{४}{१+\dfrac{३}{१+\dfrac{२}{१+\frac{१}{२}}}}}}}$

भिन्नसंख्याओं को सरल करने का नियम

(१३४) जब किसी उदाहरण में धन, ऋण, गुणन और भाग इनके चिह्नों से युक्त कई भागजाति भिन्नसंख्याएँ केवल होती हैं और प्रभागजाति भिन्न के भाग के भाग भी केवल भागजाति भिन्न में होते हैं तब उन सब को सरल करने

में पहिले अभागजाति भिन्न को सरल करो, अर्थात् 'का' की क्रिया पहिले क[रो] तब भाग की क्रिया करो, तब गुणन की क्रिया करो और अन्त में योग अन्तर क्रिया करो।

उदाहरण (१) $\frac{३}{४}$ का $\frac{१२}{१५} \div \frac{२}{५} \times \frac{१}{२} + \frac{१}{४} \times \frac{१}{८} \div \frac{१}{१६}$ का $\frac{२}{३} - \frac{१}{९}$ इस[को] सरल करो।

यहां दिया

हुआ स्वरूप $= \frac{३}{४}$ का $\frac{१२}{१५} \div \frac{२}{५} \times \frac{१}{२} + \frac{१}{४} \times \frac{१}{८} \div \frac{१}{१६}$ का $\frac{२}{३} - \frac{१}{९}$

$= \frac{३}{५} \div \frac{२}{५} \times \frac{१}{२} + \frac{१}{४} \times \frac{१}{८} \div \frac{१}{२४} - \frac{१}{९}$ 'का' की क्रिया करने से,

$= \frac{३}{५} \times \frac{५}{२} \times \frac{१}{२} + \frac{१}{४} \times \frac{१}{८} \times \frac{२४}{१} - \frac{१}{९}$ भाग की क्रिया करने से,

$= \frac{३}{४} + \frac{३}{४} - \frac{१}{९}$ गुणा की क्रिया करने से,

$= \frac{२७+२७-४}{३६} = \frac{५०}{३६} = १\frac{७}{१८}$ उत्तर.

जब किसी उदाहरण में कोष्ठ होते हैं और धन ऋण आदि चिह्नों से युक्त [इस] प्रकार की भिन्नें होती हैं तब उनको सरल करने में नीचे उत्तर करके दिखल[ाया] हुआ उदाहरण बहुत उपयोगी है।

उदाहरण (२) $\frac{२\frac{१}{४}}{२\frac{२}{३}} + \frac{२\frac{१}{२} + ५\frac{१}{५}}{३\frac{१}{३} + ९\frac{१}{२}} + \frac{१}{२} + \frac{३}{८}$ का $\frac{३}{२०} +$

$\frac{१}{१ + \frac{१}{१ + \frac{१}{७}}} \div \left(२\frac{१}{५} - १\frac{२}{३} \right)$ इसको सरल करो।

यहां $\frac{२\frac{१}{४}}{२\frac{२}{३}} = \frac{\frac{९}{४}}{\frac{८}{३}} = \frac{९}{४} \div \frac{८}{३} = \frac{९}{४} \times \frac{३}{८} = \frac{२७}{३२}$,

और $\frac{२\frac{१}{२} + ५\frac{१}{५}}{३\frac{१}{३} + ९\frac{१}{२}} = \frac{\frac{५}{२} + \frac{२६}{५}}{\frac{१०}{३} + \frac{१९}{२}} = \frac{\frac{२५+५२}{१०}}{\frac{२०+५७}{६}} = \frac{\frac{७७}{१०}}{\frac{७७}{६}} =$

$\frac{७७}{१०} \div \frac{७७}{६} = \frac{७७}{१०} \times \frac{६}{७७} = \frac{३}{५}$,

और $\frac{१}{१ + \frac{१}{१ + \frac{१}{७}}} = \frac{१}{१ + \frac{१}{\frac{८}{७}}} = \frac{१}{१ + \frac{७}{८}} = \frac{१}{\frac{१५}{८}} = \frac{८}{१५}$,

और $(२\frac{१}{५} - १\frac{२}{३}) = (२ - १ + \frac{१}{५} - \frac{२}{३}) = (१ + \frac{३ - १०}{१५})$
$= (१ - \frac{७}{१५}) = (\frac{१५ - ७}{१५}) = \frac{८}{१५}$,

अतः दिया
हुआ स्वरूप $= \frac{२७}{३२} + \frac{३}{५} + \frac{१}{२} + \frac{३}{८}$ का $\frac{३}{२०} + \frac{८}{१५} \div \frac{८}{१५}$
$= \frac{२७}{३२} + \frac{३}{५} + \frac{१}{२} + \frac{९}{१६०} + \frac{८}{१५} \div \frac{८}{१५}$ 'का' की क्रिया करने से,
$= \frac{२७}{३२} + \frac{३}{५} + \frac{१}{२} + \frac{९}{१६०} + \frac{८}{१५} \times \frac{१५}{८}$ भाग की क्रिया करने से,
$= \frac{२७}{३२} + \frac{३}{५} + \frac{१}{२} + \frac{९}{१६०} + १$ गुणा की क्रिया करने से,
$= १ + \frac{१३५ + ९६ + ८० + ९}{१६०}$
$= १ + \frac{३२०}{१६०} = १ + २ = ३$ उत्तर.

यहां पहिले संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न में और मिश्रभिन्न को, अर्थात् जिसके अंश और छेद दोनों की वा दो में से किसी एक की भिन्नसंख्या होती है, उस भिन्नभिन्न को सरल किया है, तब विततभिन्न को और फिर कोष्ठ को सरल कर के सब भिन्नों को भागजाति भिन्न में परिवर्तित किया है। फिर (१२४) प्रक्रम के अनुसार पहिले 'का' की क्रिया, तब भाग की, तब गुणा की और अन्त में योग अन्तर की क्रिया करके उक्त स्वरूप को सरल किया है। इसी तरह किसी दिये हुए स्वरूप को सरल करना चाहिये।

उदाहरणमाला (२०)

इनका मान निकालो

(१) $\frac{\frac{२}{९} \text{ का } \frac{६}{७} \div \frac{१}{७}}{\frac{१}{६} \div \frac{१}{८} \text{ का } \frac{३}{८}}$ (२) $\frac{३\frac{१}{२} - १\frac{७}{८}}{३\frac{१}{४} \text{ का } २\frac{१}{२}} \div \frac{१}{२} \text{ का } \frac{५}{६}$

(३) $\frac{\frac{१५३}{१८७} + \frac{९१}{११७}}{\frac{५}{८} + \frac{३}{११}} - \frac{१३३}{१७१}$ (४) $\frac{\frac{३}{४}}{\frac{५}{४}} + \frac{२\frac{१}{४} - \frac{३}{७}}{५\frac{१}{४} + \frac{१}{१४}} - \frac{२}{३\frac{४}{७}}$

(५) $\frac{५}{७} \text{ का } \frac{१}{३} + \frac{\frac{६}{७} - \frac{२}{३} \text{ का } \frac{३}{१४}}{\frac{२}{३} + १\frac{१}{६} \text{ का } \frac{३}{१४}}$ (६) $\frac{२\frac{१}{४} \text{ का } \frac{१}{३}}{\frac{५}{६} - \frac{१}{३}} + \frac{\frac{५}{८} - \frac{१}{९} \text{ का } \frac{३}{८}}{२\frac{१}{२} \text{ का } \frac{३}{४}}$

(७) $\frac{५}{८} \text{ का } \frac{\frac{१}{७} + \frac{१}{८}}{\frac{१}{७} \text{ का } \frac{१}{८}} \div \frac{२\frac{१}{३}}{७ + \frac{१}{३}}$ (८) $६\frac{२}{३} + \frac{१}{५} \text{ का } \frac{६\frac{२}{३} \text{ का } \frac{३}{८}}{५\frac{२}{७} \text{ का } \frac{१}{७४}}$

(९) $\frac{\frac{१}{२} + \frac{३}{४} + \frac{५}{६}}{\frac{२}{३} + \frac{१}{३} + १\frac{१}{६}} \text{ का } \frac{२\frac{१}{३}}{\frac{७}{९}}$ (१०) $\frac{५\frac{१}{१६} + ७\frac{११}{१६}}{९\frac{१}{३} - ८\frac{१}{३}} \div \frac{३\frac{३}{४} \text{ का } ४\frac{२}{३}}{२\frac{१}{२} - १\frac{१}{३}}$

(११) $\dfrac{२\frac{१}{२} - \frac{३}{१४} \text{ का } ५\frac{१}{२} \div १६\frac{१}{२}}{१६\frac{१}{३} \div ५\frac{१}{२} - \frac{३}{१४} \text{ का } २\frac{१}{३}}$

(१२) $\dfrac{८\frac{३}{५} - ७\frac{३}{४} + ५\frac{२}{३} - ४\frac{१}{२}}{१३ - ११\frac{५}{१९} + १०\frac{७}{९} - ९\frac{१७}{२०}} \times \frac{२}{११} \text{ का } ३६$

(१३) $\dfrac{४\frac{१}{४} - ३\frac{१}{३}}{४\frac{१}{४} \times ३\frac{१}{३}} + \dfrac{५\frac{१}{५} - ४\frac{१}{४}}{५\frac{१}{५} \times ४\frac{१}{४}} + \dfrac{५\frac{१}{५} - ३\frac{१}{३}}{३\frac{१}{३} \times ५\frac{१}{५}}$

(१४) $\dfrac{३\frac{१}{३} - १\frac{१}{२} \text{ का } १\frac{१}{५} - १\frac{१}{७}}{(३\frac{१}{३} - १\frac{१}{२}) \text{ का } (१\frac{१}{५} - १\frac{१}{७})} \times \dfrac{३\frac{१}{३} - १\frac{१}{२} \text{ का } (१\frac{१}{५} - १}{(३\frac{१}{३} - १\frac{१}{२}) \text{ का } १\frac{१}{५} -}$

(१५) $\left\{\dfrac{\frac{१}{२} + \frac{१}{३}}{\frac{१}{२} - \frac{१}{३}} + \dfrac{\frac{१}{३} + \frac{१}{४}}{\frac{१}{३} - \frac{१}{४}}\right\} \div \left\{\dfrac{\frac{१}{७} + \frac{१}{९}}{\frac{१}{७} - \frac{१}{९}} - \dfrac{\frac{१}{५} + \frac{१}{७}}{\frac{१}{५} - \frac{१}{७}}\right\}$

(१६) $७\frac{१}{३} + \dfrac{१२\frac{१}{३} - ७\frac{३}{४}}{\frac{५}{६} \times ५\frac{१}{२}} - \dfrac{३\frac{१}{१७} + \frac{१}{३४}}{६\frac{२}{३} - ५\frac{१}{५१}}$

(१७) $\dfrac{६\frac{१}{४} \text{ का } ४\frac{१}{३}}{१\frac{५}{६} - १\frac{१}{९}} - \dfrac{१३\frac{४}{७} + ५}{८\frac{१}{१४} + २\frac{२}{७}} \times \dfrac{\frac{५}{६} - \frac{१}{७}}{३\frac{३}{७} \text{ का } २\frac{१}{१२}}$

(१८) $\dfrac{९४\frac{१}{३}}{\frac{१}{४} + २३\frac{१}{३}} - \left(\dfrac{३\frac{१}{२} - २\frac{१}{३}}{४\frac{१}{३} - ३\frac{१}{२}} - \frac{१}{५}\right) + \dfrac{२\frac{१}{९} - १\frac{११}{१८}}{३\frac{१}{९} - २\frac{५}{९}}$

(१९) $\dfrac{१२\left(७\frac{१}{३} + \frac{१}{९} - ५\frac{१}{६}\right)}{\dfrac{२\frac{१}{२} + ३\frac{४}{५} + \frac{१}{५}}{\frac{१}{२} \times \frac{१}{५}}} \text{ का } \dfrac{६\frac{१}{४} + \frac{५}{१२} - \frac{१}{६}}{\frac{३}{४} \div १\frac{१}{३} + ११\frac{७}{१६}}$

(२०) $\dfrac{३\frac{३}{७}}{१\frac{२}{७} \text{ का } \frac{२}{९}} + \dfrac{८\frac{१}{४} + २\frac{१}{३} - ९\frac{५}{१२}}{२५\frac{११}{१२} + ३\frac{३}{४} - २७\frac{१}{३}} - \dfrac{९\frac{३}{४} \text{ का } १\frac{३}{१३}}{४\left(\frac{१}{२} + १\frac{१}{४}\right)} \text{ का } १\frac{२}{३}$

(२१) $\dfrac{७ - २९ \div [५ + ३ \div \{२ + १ \div (४ - \frac{२}{३})\}]}{\frac{९१}{१२२}\left(४\frac{१}{८} \text{ का } ६\frac{२}{७} + \frac{३}{१४}\right) \div \left\{४\frac{१}{८} \text{ का } \left(६\frac{२}{७} + \frac{३}{१४}\right)\right\}}$

भिन्नसंख्याओं का रूपभेद

(१३५) जिस प्रकार हम किसी बड़े परिमाण को सवर्णन क्रिया से छ
परिमाण में परिवर्तित कर सकते हैं और छोटे परिमाण को विवर्णन क्रिया से ब
परिमाण में परिवर्तित कर सकते हैं उसी तरह किसी बड़े परिमाण के भिन्न
छोटे परिमाण का रूप और छोटे परिमाण के भिन्न को बड़े परिमाण का रूप
सकते हैं ।

(१) प्रकार—किसी बड़े परिमाण के भिन्न को छोटे परिमाण का रूप देने के लिये उस बड़े परिमाण में अभीष्ट छोटे परिमाणों की जो संख्या होगी उससे उस बड़े परिमाण के भिन्न को गुण कर जो गुणनफल होगा वह उस छोटे परिमाण की जाति का होगा।

उदाहरण—(१) १ रुपये के $\frac{३}{८}$ इनको आने का रूप दो।

यहाँ १ रु० = १६ आ० $\therefore \frac{३}{८} \times १६ = ६ \therefore$ ६ आ० उत्तर.

अर्थात् १६ आ० के $\frac{३}{८}$ का मान ६ आ० होता है। यहाँ १६ आ० के $\frac{३}{८}$ का मान हम दो प्रकार से लाते हैं:—१६ आ० को ३ से गुण कर गुणनफल में ८ का भाग देने से अथवा १६ आ० में ८ का भाग दे कर लब्धि को ३ से गुणने पर ६ आ० यह मान लाते हैं। इसी तरह किसी मिश्रसंख्या के भिन्न का मान लाने में हम उस भिन्न के अंश से उस मिश्रसंख्या को गुण कर गुणनफल में उस भिन्न के छेद का भाग देते हैं। अथवा उस भिन्न के छेद का उस मिश्रसंख्या में भाग दे कर लब्धि को उस भिन्न के अंश से गुण देते हैं।

उदाहरण (२) ५ रु० २ आ० ४ पा० के $\frac{३}{४}$ का क्या मान है?

पहिले प्रकार से,

	रु०	आ०	पा०	
	५	२	४	
			×३	
४)	१५	७	०	= ५ रु० २ आ० ४ पा० का ३ गुना,
	३	१२	९	,, ,, ,, ,, $\frac{३}{४}$, उत्तर

अथवा दूसरे प्रकार से

	रु०	आ०	पा०	
४)	५	२	४	
	१	४	७	= ५ रु० २ आ० ४ पा० का $\frac{१}{४}$,
			×३	
	३	१३	९	= ,, ,, ,, ,, $\frac{३}{४}$, उत्तर

यहाँ तिगुने ५ रु० २ आ० ४ पा० के ४ समान भाग कर के उनमें से १ भाग का मान ३ रु० १२ आ० ९ पा० यह जो होता है वही मान ५ रु० २ आ० ४ पा० के ४ समान भाग कर के उनमें से ३ भागों का होता है। इससे (१०६) प्रक्रम का नियम सिद्ध होता है।

अथवा $\frac{३}{४} = १ - \frac{१}{४}$ इस पर से भी हम उक्त मान लाते हैं। जैसे,

	रु०	आ०	पा०	
४)	५	२	४	= ५ रु० २ आ० ४ पा० एक गुणित,
−	१	४	७	= ,, ,, ,, का $\frac{१}{४}$,
	३	१३	९	= ,, ,, ,, ,, $\frac{३}{४}$, उत्तर

यहाँ एक गुणित ५ रु० २ आ० ४ पाई० में उसके $\frac{१}{४}$ का मान घटाने से पूर्वोक्त मान आता है।

उदाहरणमाला (२१)

नीचे दिये हुए परिमाणों का छोटे परिमाणों में मान निकालो

(१) ४ रु० के $\frac{३}{१६}$ का (२) १३ गिनी के $\frac{४}{७}$ का (३) ३ तोले के $\frac{५}{३२}$ (४) $\frac{१३}{५४}$ दिन का (५) $\frac{३}{२}$ प्रहर का (६) $\frac{१९}{२०}$ घण्टे का (७) $\frac{७}{३२०}$ एकड़ (८) $\frac{३}{४}$ रूड़ का (९) $\frac{५}{६}$ पौंड (स्टर्लिङ्ग) का (१०) $\frac{५}{४४८}$ टन का (११) $\frac{३}{८}$ मन (१२) $\frac{१५}{२६४}$ मील का (१३) $\frac{२}{९}$ हाथ का

इनका मान निकालो

(१४) २८ रु० १४ आ० ६ पा० के $\frac{३}{५}$ का

(१५) ३५ रु० १२ आ० ६ पा० के $\frac{७}{१०}$ का

(१६) ७२ रु० ३ आ० ३ पैसे के $\frac{२२}{२३}$ का

(१७) ९७ पौं० १० शि० ३ पे० के $\frac{७}{२९}$ का

(१८) २९ पौं० ६ शि० १ पे० $\frac{३९}{५२}$ का

(१९) १० मन १३ सेर ८ छ० के $\frac{७}{८}$ का

(२०) ९२ वर्ष ३५७ दिन १५ घण्टे ४० मिनट के $\frac{६}{७}$ का

(२१) ९५ गज १ फू० ८ इ० के $\frac{१५}{१६}$ का

(२२) ९६ तो० ८ मा० ५ र० के $\frac{१४}{१५}$ का

(२३) ४ आने में कितने आने मिलाये जांय जिससे उनका योग १२ रु० के $\frac{१}{३६}$ के बराबर हो ?

(२४) एक मनुष्य की वार्षिक आमदनी २५०० रुपया है, यदि उस आमदनी का $\frac{६}{७}$ सालाना खर्च में और $\frac{३}{२८}$ टैक्स देने में खर्च हो तो उसके पास कितना बचेगा ?

(२५) एक गाड़ी ६२ मील १ फर्लांग १५५ गज दूर जाने में दो बार विश्राम करती है, पहिली बार उस दूरी के $\frac{२}{५}$ पर और दूसरी बार $\frac{४}{१५}$ पर विश्राम करती है तो बताओ उस गाडी को अब और कितनी दूर जाना है ?

(२) प्रकार—छोटे परिमाण की संख्या को बड़े परिमाण का रूप देना हो तो अभीष्ट बड़े परिमाण के तुल्य छोटे परिमाणों की जो संख्या होगी उसका उस छोटे परिमाण की संख्या में भाग देने से वह छोटे परिमाण की संख्या बड़े परिमाण में परिवर्तित होगी।

उदाहरण (१) $२\frac{६}{१३}$ रत्ती को तोले का रूप दो।

यहां ९६ रत्ती = १ तोला और $२\frac{६}{१३} = \frac{३२}{१३}$,

$\therefore \frac{३२}{१३} \div ९६ = \frac{३२}{१३} \times \frac{१}{९६} = \frac{१}{३९}$ तोला, उत्तर,

ऊपर के उदाहरण के प्रश्न को हम इस तरह भी पूछ सकते हैं कि $२\frac{६}{१३}$ रत्ती को तोले के भिन्न में लाओ। और किसी संख्या को दूसरी संख्या के भिन्न में परिवर्तित करना हो तो पहिली संख्या को अंशस्थान में और दूसरी संख्या को छेदस्थान में रखना चाहिये। यह विषय तुमको पहिले मालूम हो चुका है। अतः ऐसे उदाहरणों को इसी नियम से करना चाहिये।

उदाहरण (२) $२\frac{१}{३}$ को $३\frac{१}{४}$ के भिन्न का रूप दो।

यहां अभीष्ट भिन्न $= \frac{२\frac{१}{३}}{३\frac{१}{४}} = \frac{\frac{७}{३}}{\frac{१३}{४}} = \frac{७}{३} \div \frac{१३}{४} = \frac{७}{३} \times \frac{४}{१३} = \frac{२८}{३९}$ उत्तर,

उदाहरण (३) ९० रु० २७० रु० की कौन सी भिन्न है ?

यहां २७० रु० की अभीष्ट भिन्न = ९० रु०, और 'का' का अर्थ गुणन करना होने से, २७० रु० × अभीष्ट भिन्न = ९० रु०, और गुणनफल में गुण्य का भाग देने से गुणक और गुणक का भाग देने से गुण्य मालूम होता है इस नियम से,

$$\text{अभीष्ट भिन्न} = \frac{९० \text{ रु०}}{२७० \text{ रु०}} = \frac{१}{३}, \text{ उत्तर,}$$

यहां २७० रु० की तिहाई ९० रु० होते हैं। अर्थात् ९० रु० २७० रु० का $\frac{१}{३}$ भाग है। अब यदि ऐसा प्रश्न हो कि, ९० रु० कितने रुपये का $\frac{१}{३}$ होता है। तब पूर्व युक्ति से, अभीष्ट रुपये $\times \frac{१}{३} = ९०$ रु०,

$\therefore$ अभीष्ट रुपये $= ९० \div \frac{१}{३} = \frac{९० \times ३}{१} = २७०$ रु०,

जब किसी मिश्रसंख्या को दूसरी मिश्रसंख्या के भिन्न में लाना हो तो नियम से पहिली मिश्रसंख्या को अंशस्थान में और दूसरी मिश्रसंख्या को छेदस्थान में रख कर अंश और छेद दोनों को एक जाति में परिवर्तित करना चाहिये।

उदाहरण (४) १ रु० १२ आ० को २ रु० की भिन्न में लिखो।

यहां १ रु० १२ आ० = १ रु० + $\frac{३}{४}$ रु० = १$\frac{३}{४}$ रु० = $\frac{७}{४}$ रु०

∴ अभीष्ट भिन्न = $\frac{\frac{७}{४} \text{ रु०}}{२ \text{ रु०}} = \frac{\frac{७}{४}}{\frac{२}{१}} = \frac{७}{४} \div \frac{२}{१} = \frac{७}{४} \times \frac{१}{२} = \frac{७}{८}$, उत्तर

अथवा, १ रु० १२ आ० = १६ आ० + १२ आ० = २८ आ०,

∴ अभीष्ट भिन्न = $\frac{२८ \text{ आ०}}{३२ \text{ आ०}} = \frac{७}{८}$, उत्तर,

उदाहरण (५) २ फूट ९ इञ्च, ४ यार्ड २ फूट ६ इञ्च की कौनसी भिन्न है

यहां अभीष्ट भिन्न = $\frac{२ \text{ फू० } ९ \text{ इ०}}{४ \text{ या० } २ \text{ फू० } ६ \text{ इ०}}$, और अंश और छेद दोनों को यार्डजाति में परिणत करना है, तब पहिले २ फू० ९ इञ्च के यार्ड बनाये, ९ इ० को १२ से भागा, तब $\frac{९}{१२} = \frac{३}{४}$ यह फूट भये, इसमें २ फूट को जोड़ा, तब २ फू० + $\frac{३}{४}$ फू० = $\frac{११}{४}$ फू०, इसको ३ से भागा, तब $\frac{११}{४ \times ३} = \frac{११}{१२}$ यह यार्ड भये

अब ४ या० २ फू० ६ इ० के यार्ड बनाये, तब ६ इ० = $\frac{६}{१२} = \frac{१}{२}$ फू० इसमें २ फू० को जोड़ा तब २ फू० + $\frac{१}{२}$ फू० = $\frac{५}{२}$ फू० इसको ३ से भागा तब $\frac{५}{२ \times ३} = \frac{५}{६}$ यह यार्ड भये, इसमें ४ या० को जोड़ा, तब ४ या० + $\frac{५}{६}$ या० = $\frac{२९}{६}$ या०

अब अभीष्ट भिन्न = $\frac{२ \text{ फू० } ९ \text{ इ०}}{४ \text{ या० } २ \text{ फू० } ६ \text{ इ०}} = \frac{\frac{११}{१२} \text{ या०}}{\frac{२९}{६} \text{ या०}} = \frac{११}{१२} \div \frac{२९}{६}$

$= \frac{११}{१२} \times \frac{६}{२९} = \frac{११}{५८}$, उत्तर,

अथवा २ फू० ९ इ० = ३३ इ०, और ४ या० २ फू० ६ इ० = १७४ इ०,

∴ अभीष्ट भिन्न = $\frac{२ \text{ फू० } ९ \text{ इ०}}{४ \text{ या० } २ \text{ फू० } ६ \text{ इ०}} = \frac{३३ \text{ इ०}}{१७४ \text{ इ०}} = \frac{११}{५८}$, उत्तर,

यहाँ अंश और छेद दोनों को फूट की जाति में परिवर्तित करने से भी वही उत्तर आवेगा?

उदाहरणमाला (२२)

नीचे दिये हुए छोटे परिमाणों को सबसे बड़े परिमाण का रूप दो

(१) ८ पाई (२) १$\frac{३}{४}$ शिलिंग (३) ६ रत्ती (४) २७ सेकण्ड (५) १० घटी (६) ४८० फूट (७) ५ आ० ४ पा० (८) १३ शिलिंग ४ पेन्स (९) ४ मन १२ सेर (१०) ३ माशा ४ रत्ती।

(११) ७ रु० ५ आ० ४ पा० को १ रु० की भिन्न में लाओ।

(१२) ३ पौं० ६ शि० ८ पे० को १ पौं० की भिन्न में लाओ।

(१३) $\frac{३}{४}$ यह $\frac{५}{६}$ का कौन भाग है ?

(१४) ७$\frac{३}{४}$ यह ५०$\frac{१}{२}$ की कौन सी भिन्न है ?

(१५) १ शि० ८ पे० यह ११ शि० ४ पे० की कौनसी भिन्न है ?

(१६) २ रु० ८ आ० यह ४१ रु० ६ आ० ८ पा० की कौनसी भिन्न है ?

(१७) १ मन ३८ सेर यह ७ सेर ५ छटांक का कौनसा भाग है ?

(१८) ३ फू० ३ इं० को ४३ यार्ड १ फूट की भिन्न में लिखो।

(१९) ५ रु० ८ आ० के $\frac{१}{३}$ को ७ रु० ९ आ० के $\frac{१}{३}$ की भिन्न में परिवर्तित करो।

(२०) १७ पौं० ८ शि० के $\frac{९\frac{१}{२} \text{ का } \frac{४}{१८}}{७\frac{१}{२} \div १\frac{७}{८}}$ को ३४ पौं० १६ शि० की भिन्न में लिखो।

(२१) ५ रुपये के $\frac{८\frac{१}{२} + ७\frac{१}{४}}{६\frac{४}{७} \times \frac{१४}{४६}}$ को १० रु० के $\frac{७\frac{१}{३} \div १४\frac{२}{३}}{\frac{१}{४} + \frac{१}{८}}$ की भिन्न में लिखो।

(२२) $\frac{\text{११ रु० ९ आ० ११ पा०}}{\text{२३ रु० ३ आ० १० पा०}}$ इसको संक्षिप्त रूप में लिखो।

(२३) $\frac{\text{५५ पौं० ६ शि० ८ पे०}}{\text{२० पौं० १३ शि० ४ पे०}}$ इसका संक्षिप्त रूप लिखो।

(२४) $\frac{\text{३ यार्ड २ फी० ८ इं०}}{\text{५ यार्ड २ फी० ४ इं०}}$ इसका संक्षिप्त रूप क्या होगा ?

(२५) $\frac{\text{७ यार्ड २ फी० ९ इं०}}{\text{१२ यार्ड २ फी० ९ इं०}}$ इसको संक्षिप्त रूप दो।

भिन्न के सम्बन्ध के कुछ प्रश्न

उदाहरण (१) एक कमल पुष्प के राशि का तीसरा भाग शङ्कर जी को, पांचवा भाग विष्णु को, छठवा भाग गणेश जी को और चौथा भाग दुर्गा जी को चढ़ाया गया, तब शेष ६ कमल बच गये, तो उन कमल पुष्पों की संख्या बताओ।

यहां पूरे पूरे कमल के पुष्प चढ़ाये गये हैं इसलिये उनकी संख्या ३, ५, ६, ४ इनके लघुतमसमापवर्त्य के बराबर अवश्य होनी चाहिये, और उक्त संख्याओं का लघुतमसमापवर्त्य ६० है इसलिये ६० पुष्पों की संख्या होनी चाहिये। परन्तु ६० का तीसरा भाग २०, पांचवा भाग १२, छठवा भाग १० और चौथा भाग १५ होता है, और इन भागों का योग ५७ होने से शेष ३ कमल पुष्प बचते हैं और उदाहरण के शेष कमलों की संख्या ३ की दूनी है, इसलिये ६० × २ = १२० यह अभीष्ट कमलों की संख्या है।

अथवा, यहां अज्ञात कमल पुष्पों की संख्या का मान १ मान कर १ में $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{६}$ और $\frac{१}{४}$ इन सब का योग १ में घटाने से,

$$१ - \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} + \frac{१}{४} \right) = १ - \left(\frac{२० + १२ + १० + १५}{६०} \right) =$$

$$१ - \frac{५७}{६०} = \frac{३}{६०} = \frac{१}{२०},$$

अब अभीष्ट कमलराशि का $\frac{१}{२०} = ६$,

अथवा अभीष्ट कमलराशि $\times \frac{१}{२०} = ६$,

$\therefore$ अभीष्ट कमलराशि $= ६ \div \frac{१}{२०} = \frac{६ \times २०}{१} = १२०$ उत्तर

इसी तरह अज्ञात राशि का मान १ मान कर कहीं कहीं उत्तर निकाला जाता है।

उदाहरण (२) एक मनुष्य ने अपनी आमदनी का $\frac{७}{९}$ अपने लड़के को दिया और बाकी जो आमदनी बची उसका $\frac{५}{८}$ अपने लड़की को दिया तब जो आमदनी का शेष भाग बचा वह ६० रुपये के बराबर है, तो उसकी आमदनी को बताओ।

यहां अज्ञात राशि उस मनुष्य की आमदनी है उसका मान १ मानने से,

$१ - \frac{७}{९} = \frac{२}{९}$ यह लड़के को देने के बाद बचा हुआ भाग,

$\therefore \frac{२}{९}$ का $\frac{५}{८} = \frac{५}{३६}$ यह लड़की को दिया हुआ भाग,

$\therefore \frac{२}{९} - \frac{५}{३६} = \frac{१}{१२}$ यह अन्त में बचा हुआ भाग,

$\therefore$ आमदनी का $\frac{१}{१२}$ बचा हुआ भाग = ६० रु०

अथवा, आमदनी $\times \frac{१}{१२}$ = ६० रु०

∴ आमदनी = ६० रु० $\div \frac{१}{१२} = \frac{६०\times१२}{१}$ = ७२० रु०, उत्तर

किन्तु जिस उदाहरण में अज्ञात राशि को किसी संख्या से गुणने वा भाग देने के अतिरिक्त उसमें कुछ जोड़ने वा घटाने को कहा गया हो अथवा वर्ग करने वा वर्गमूल निकालने को कहा गया हो वहां उस अज्ञात राशिका मान १ मानने से उत्तर नहीं आता है। ऐसी स्थिति में उदाहरण में कहे हुए अन्तिम फल में विपरीत क्रिया करने से उत्तर निकाला जाता है। अर्थात् उस अन्तिम फल में भाग देने के स्थान में गुणन, गुणन के स्थान में भाग, योग के स्थान में अन्तर, अन्तर के स्थान में योग, वर्ग के स्थान में वर्गमूल और वर्गमूल के स्थान में वर्ग करके उत्तर लाया जाता है। इसको व्यस्तविधि कहते हैं। और उस अन्तिम फल को दृश्य कहते हैं। इस क्रिया को अन्त से ही प्रारंभ करना चाहिये। यह सब विषय नीचे दिये हुए उदाहरणों से स्पष्ट होगा।

उदाहरण (३) मेरी आयु को ३ से गुणा करो और गुणनफल के $\frac{३}{७}$ का तिगुना करो और उसके $\frac{२}{९}$ का वर्गमूल ४ है, तो मेरी अवस्था बताओ।

न्यास— $\overset{\times}{३}$, $\overset{\text{का}}{\frac{३}{७}}$, $\overset{\times}{३}$, $\overset{\text{का}}{\frac{२}{९}}$, वर्गमूल और दृश्य ४ है।

यहां ३ से गुणना है अतः ३ के ऊपर गुणन चिह्न लिखा, और गुणनफल का $\frac{३}{७}$ है अतः $\frac{३}{७}$ के ऊपर 'का' को लिखा जिसका अर्थ गुणन होता है, फिर ३ से गुणना है अतः ३ के ऊपर गुणन चिह्न लिखा, फिर उसका $\frac{२}{९}$ है अतः $\frac{२}{९}$ के ऊपर 'का' लिखा, फिर वर्गमूल निकालना है अतः वर्गमूल लिखा। अब दृश्य ४ में अन्त से क्रिया प्रारंभ करने से, अन्त में वर्गमूल है इसलिये ४ का वर्ग = ४ × ४ = १६, और $\frac{२}{९}$ के ऊपर का चिह्न है अतः $\frac{२}{९}$ का १६ में भाग दिया तब १६ $\div \frac{२}{९} = \frac{१६\times९}{२}$ = ७२, इसके बाद ३ गुणक है इसलिये ७२ में ३ का भाग दिया तब ७२ ÷ ३ = २४, इसके बाद $\frac{३}{७}$ के ऊपर का चिह्न है अतः २४ $\div \frac{३}{७} = \frac{२४\times७}{३}$ = ८४, इसके बाद ३ गुणक है इस लिये ८४ ÷ ३ = २८ यह अभीष्ट अज्ञात राशि का मान हुआ।

परन्तु ऐसे प्रश्नों में यदि कोई संख्या अपने भिन्नात्मक अंश से युक्त वा न्यून करने के लिये कही गई हो तो क्रम से उस भिन्न संख्या के अंश को छेद में जोड़ दो वा घटा दो। और उस योग वा अन्तर को छेदस्थान में रखो और अंशस्थान

में उस भिन्न के अंश को ही रखो। तब इस अंश और छेद से जो नई भिन्न संख्या बनेगी उतने उस दृश्य वा अन्तिम फल के अंश को उसी प्रश्न में जोड़ने को कहा हो तो घटा दो और घटाने को कहा हो तो जोड़ दो। तब आगे क्रिया करो।

उदाहरण (४) वह कौन संख्या है जिसका $\frac{३}{७}$ उसी संख्या में जोड़ दो तो योग २० होता है।

यहां $\frac{३}{७}$ उसी संख्या के हैं यह सूचित करने के लिये $\frac{३}{७}$ स्व, ऐसा लिखने से स्पष्ट होता है। अब उस संख्या के $\frac{३}{७}$ उसमें जुड़े हुए हैं इसलिये ३ इस अंश को ७ छेद में जोड़ कर $\frac{३}{१०}$ इतने उस दृश्य के अंश उस दृश्य में घटाने होंगे अतः २० का $\frac{३}{१०}$ = ६ यह २० में घटाने से १४ यह अज्ञात राशि का मान हुआ।

उदाहरण (५) वह कौनसी संख्या है जिसके $\frac{२}{७}$ उसमें जोड़ देने से जो योग होगा उसके $\frac{५}{११}$ को उसी योग में घटा दो तो शेष ४२ बचता है।

यहां पहिले कहे हुए नियम के अनुसार न्यास,

$\overset{-}{\frac{२}{७}}$स्व, $\overset{+}{\frac{५}{६}}$ स्व, और दृश्य ४२,

अब ४२ का $\frac{५}{६} = ४२ \times \frac{५}{६} = ३५$ इसको ४२ में जोड़ देने से ७७ योग हुआ, फिर ७७ का $\frac{२}{७} = ७७ \times \frac{२}{७} = २२$ इसको ७७ में घटाने से ५५ यह अभीष्ट अज्ञात राशि हुआ।

विविध उदाहरण माला (२३)

(१) $४\frac{१}{२}$ का $१\frac{१}{३}$ में कौन संख्या जोड़ने से योगफल ८ होगा?

(२) $४\frac{२}{३}$ में कौन संख्या घटा देने से $२\frac{१}{६}$ शेष बचेगा?

(३) $२\frac{२}{३}$ को किस संख्या में घटाने से $\frac{८}{१३}$ का $५\frac{१}{८} \div २\frac{२}{१८}$ इतना शेष बचेगा?

(४) किस संख्या को $\frac{४}{८} + \frac{३}{१८}$ इससे गुणने पर गुणनफल $\frac{७}{१६} + \frac{३}{४} +$ यह होगा?

(५) $\frac{२}{८}$ को किस संख्या से भाग देने पर लब्धि १० होगी?

(६) $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ इनके योग में इनका अन्तर कितनी बार सम्मिलित है?

(७) $६\frac{१}{३}$ से किस संख्या को भाग दें जिससे $१\frac{८}{१९}$ यह लब्धि होगी?

(८) एक रुपये के किस भाग में २ आ० ८ पा० जोड़ने से योगफल आने होंगे?

(९) $\frac{५}{८}$ इसके अंश में क्या जोड़ने से उस भिन्न का $\frac{३}{४}$ यह मान होगा ?

(१०) वह चार भिन्न संख्याएँ कौन हैं जिनका जोड़ १ होता है और जिनके [अं]श क्रम से ७, ९, ११ और १३ हैं ?

(११) एक भिन्न संख्या में $\frac{१}{८}$ जोड़ने से योग $\frac{२}{३}$ होता है, यदि उस भिन्न [क]ा अंश १९$\frac{१}{२}$ है तो उसका छेद बताओ।

(१२) $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२}$ इनके योग में क्या मिलाने से योगफल अत्यन्त [छ]ोटी पूर्णाङ्क संख्या होगी ?

(१३) $\frac{३}{५}\frac{१}{६}\frac{१}{१२}\frac{१}{२}$ इसको किससे गुणने पर गुणनफल छोटी से छोटी अभिन्न [सं]ख्या होगी ?

(१४) दो भिन्न संख्याओं का गुणनफल $\frac{२}{३}$ है, उनमें से एक भिन्न १$\frac{७}{९}$ है [त]ो दूसरी कौन है ?

(१५) $\frac{४}{७}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{५}{९}$ और $\frac{२}{३}$ इनमें सबसे छोटी भिन्न में सबसे बड़ी भिन्न को [ज]ोड़ो और योगफल में दूसरी दो भिन्नों के अन्तर का भाग दो।

(१६) दो भिन्नों का योग २६$\frac{३}{५}$ है, एक भिन्न दूसरे से ४$\frac{५}{६}$ से कम है तो [दू]सरी भिन्न को बताओ।

(१७) एक मजदूर एक काम को ८ दिन में करता है, और उसका लड़का [उ]स काम को १२ दिन में करता है, तब बताओ प्रति दिन कौन किससे कितना [अ]धिक काम करता है और दोनों मिल कर प्रति दिन कितना काम करते हैं ?

(१८) एक मनुष्य जब अपने धन का $\frac{४}{७}$ खर्च करता है तब उसको मालूम [ह]ोता है कि बचे हुए धन का $\frac{२}{११}$ का मान ३२४ रु० होते हैं, तो उसके पास [क]ितना धन है ?

(१९) एक घोड़ा और गाड़ी का यौगिक मूल्य १०५ रु० हैं, यदि घोड़े का [म]ूल्य गाड़ी के मूल्य से ६$\frac{१}{२}$ गुना है, तो प्रत्येक का मूल्य बताओ।

(२०) एक धन का $\frac{५}{१२}$ अ को मिलता है, ब को $\frac{२}{९}$ मिलता है और क को [श]ेष धन मिलता है, यदि क का भाग ८० रु० हो तो ब के भाग का मान निकटतम [प]ाई तक बताओ।

(२१) एक मनुष्य अपने आमदनी का $\frac{१}{१०}$ धर्म कार्य में खर्च करता है

और $\frac{१}{८}$ टैक्स देने में खर्च करता है, यदि उसके पास ४०६ रु० बचते हों उसकी आमदनी क्या है ?

(२२) एक थैली में कुछ द्रव्य था उसका $\frac{३}{४}$ मजदूरी देने में खर्च हो गया और जो शेष बचा उसका $\frac{४}{६}$ चुरा लिया गया अब यदि उस थैली में २० बचे तो उस थैली में पहिले कितना द्रव्य था ?

(२३) एक संख्या में उसका ग्यारहवां भाग घटाया जाय तो १०० बचता है, तो उस संख्या को बताओ।

(२४) एक मनुष्य को २०० बीघों का $\frac{३}{८}$ मिला, उसने अपने भाग $\frac{२}{३}$ बेच दिया तो उसके पास कितने बीघे शेष रहे ?

(२५) एक मनुष्य अपने सम्पत्ति का पांचवा भाग अपने ज्येष्ठ पुत्र देता है और उसका छठवा भाग दूसरे चार पुत्रों में से प्रत्येक को देता है उसके पास १०००० रु० शेष बचते हैं तो उसका कुल धन कितना है ?

(२६) एक खम्भे का पांचवा भाग मिट्टी में, $\frac{१}{३}$ भाग जल में और १४ जल के ऊपर हैं तो उस खम्भे की लम्बाई क्या है ?

(२७) एक संख्या में से $\frac{१}{५}-\frac{१}{६}$ इतना घटाने से जो शेष बचा उ $\frac{१}{५}\times\frac{१}{६}$ जोड़ा तब योगफल $\frac{१}{५}+\frac{१}{६}$ इतना हुआ, तो वह कौन संख्या है ?

(२८) एक संख्या का $\frac{१}{५}$ उसके $\frac{१}{८}$ से १८ अधिक है तो उस संख्याको बता

(२९) २० हाथ लम्बे रस्सी के २$\frac{३}{४}$ हाथ लम्बाई के जितने टुकड़े कि सकते हैं उतने करने पर रस्सी का कौन भाग शेष रहेगा ?

(३०) एक लड़के के पास रुपये का बारहवा भाग था, उसमें से उस उसने खर्च किया तो उसके पास कितना शेष रहा ?

(३१) २$\frac{३}{८}$ रुपये की पाई बनाओ, और ६$\frac{७}{१८}$ मन के छटांक बनाओ

(३२) ७ तो० ८ मा० ५$\frac{३}{४}$ र० और ३ तो० ७ मा० ४$\frac{१}{२}$ र० इनके को २५$\frac{३}{८}$ से गुण दो।

(३३) ४॥) रु०, ३५$\frac{३}{४}$ आने, २$\frac{७}{८}$ चवन्नियां इनका योग करो।

(३४) किसी संख्या में २$\frac{१}{२}$ जोड़ने से जो योग होगा उसको ४$\frac{१}{२}$ से देने पर जो गुणनफल होगा उसमें २ जोड़ने से जो योग होगा उसमें १ भाग देने से लब्धि २५ होती है, तो वह संख्या कौन है ?

(३५) वह संख्या कौन है ? जिसको ७ से गुण कर गुणनफल में ८ जोड़ दो, फिर उस योग में उसी के ३/१० जोड़ कर योगफल में ९ घटा दो और शेष में ११ का भाग दो तो लब्धि ६३ आती है।

(३६) यह सिद्ध करो कि प्रत्येक संख्या का १/२, १/३, और १/६ इनका योग उसी संख्या के समान होता है।

(३७) यह सिद्ध करो कि (३+४+९)/(७+९+२०) इसका मान ३/७ से बड़ा ४/९ के तुल्य और ९/२० से छोटा होता है।

(३८) किसी संख्या के वर्ग में उस वर्ग के २/५ और ९ जोड़ दो तो जो योग होगा उसके वर्गमूल में उसी मूल के ३/२ घटा दो तो शेष ६ बचता है, बताओ वह कौन संख्या है ?

(३९) किस संख्या का ७/१२ उसके १/२ से ७ अधिक है ?

(४०) राम के रुपये का ३/७ कृष्ण के रुपये के ५/६ से ५९ रुपये अधिक है, कृष्ण के रुपये का १/१२ यह ६० रुपये के बराबर है, तो राम के पास कितने रुपये हैं ?

(४१) यदि एक मनुष्य प्रतिदिन १/१४६ पौंड खर्च करता है तो साल भर में वह कितना खर्च करेगा ?(१ साल = ३६५ दिन)

(४२) यदि एक वस्तु का दाम १२ ५/१६ पौंड है, तो २५ दर्जन वस्तुओं का मूल्य बताओ।

(४३) वह सबसे बड़ी भिन्न कौन है ? जिसका अंश ५, ७, ६ इन तीन अङ्कों से बना है और उसका छेद ४, ३, ५, ७ इन चार अङ्कों से बना हुआ है।

(४४) एक मनुष्य ने अपने धन का ५/७ अपने ज्येष्ठ पुत्र को दिया, तब जो शेष बचा उसका ५/७ अपने कनिष्ठ पुत्र को दिया, यदि उन दोनों के हिस्सों का अन्तर ८००० रु० हों तो उस धन का मान क्या है ?

(४५) एक द्रव्य के थैली में से उस द्रव्य का २/५ निकाल लेने के बाद जो शेष द्रव्य रहा उसका ३/४ यदि ६ रु० ११ आ० ८ पा० के बराबर हो तो बताओ उस थैली में कितना द्रव्य था ?

(४६) एक टोकरी में कुछ फल थे उनका तीसरा भाग राम को दिया गया, पांचवा भाग कृष्ण को दिया गया, और राम और कृष्ण के भागों के तिगुने

अन्तर के तुल्य फल हरि को दिये गये, तब १ फल शेष रहा बताओ उस टोक
में कितने फल थे ?

(४७) एक बाग के पेड़ों में से आधे पेड़ आम के हैं, एक चतुर्थांश कट
के, एक षष्ठांश अनार के और शेष अमरूद के ५० पेड़ हैं, तब उस बाग के
कितने पेड़ हैं ?

(४८) एक लड़के ने अपने पास के पैसों के $\frac{१}{४}$ पैसे के आम मोल लि
और शेष पैसों के $\frac{७}{८}$ पैसे के केले मोल लिये तब उसके पास ९ पैसे बचे, बता
उसके पास पहिले कितने पैसे थे ?

(४९) एक धन का $\frac{१}{२}$ अ को, $\frac{१}{३}$ क को और शेष ब को मिला, अ
अपने हिस्से का आधा भाग अपने पास रख कर $\frac{१}{३}$ क को और ब को दि
तब क के पास ब से ९ रु० अधिक हुए, बताओ वह धन क्या है ?

(५०) एक रेलगाड़ी जब एक स्टेशन पर पहुंची, तब उसमें जितने यात्
थे उनमें से $\frac{१}{३}$ यात्री उतर गये और ९६ यात्री उसमें सवार हुए, आगे
स्टेशन पर इन सब यात्रियों में से आधे यात्री उतर गये और १२ नये यात्
सवार हुए, तब यात्रियों की संख्या २४८ हुई, तो बताओ उस रेलगाड़ी में पहि
कितने यात्री सवार थे ?

दशमलवगणित

इस में दशमलवव्युत्पादन, दशमलवों का संकलन, व्यवकलन, गुणन, भज
महत्तमसमापवर्तक और लघुतमसमापवर्त्य इतने प्रकरण हैं ।

दशमलव-व्युत्पादन ।

(१३६) जिस भिन्न संख्या का छेद १० वा १० का कोई घात १०
१००० इत्यादि होता है उस संख्या को **दशमलव** वा **दशमलवभिन्न** कहते हैं
इस दशमलव को अंश के नीचे छेद लिखकर द्योतित नहीं करते हैं । किन्तु छे
के स्थान में १ के आगे जितने शून्य होते हैं, अंश के एक स्थान के अंक की बा
ओर उतने अंकों को गिनकर उनके आगे (·) ऐसा बिन्दु लिखते हैं । और इस बिन
को दशमलव बिन्दु कहते हैं ।

जैसे, $\frac{३}{१०}$, $\frac{२१}{१००}$, $\frac{९२८}{१००}$, $\frac{२४७२}{१०}$ इनको क्रम से ·३, ·२१, ९·२८, २४७
इस तरह लिखते हैं और इनको दशमलवभिन्न वा दशमलव कहते हैं ।

और जहां छेद के शून्यों की संख्या से अंश के अंकों की संख्या कम होती है वहां वह संख्या जितनी कम होगी उतने शून्य अंश की बांई ओर के अन्तिम अंककी बांई ओर लिख कर उसके आगे दशमलवबिन्दुको रखना चाहिये।

जैसे, $\frac{७}{१००}$, $\frac{२७}{१०००}$, $\frac{९}{१००००}$, $\frac{५१}{१००००}$, इनको क्रम से ·०७, ·०२७, ·०००९, ·००५१ इस तरह लिखना चाहिये।

इस प्रकार लिखे हुए दशमलव संख्या के दशमलवबिन्दु की बांई ओर के भाग को अभिन्न भाग तथा दांई ओर के भाग को भिन्न भाग कहते हैं।

सिद्धान्त (१)—दशमलव संख्या के छेद से अंश की संख्या यदि बड़ी होगी तो अंश में छेद का भाग देने पर अभिन्न भाग लब्धि और भिन्न भाग शेष होता है।

जैसे, $२२·५८ = \frac{२२५८}{१००} = २२\frac{५८}{१००}$ अर्थात् २२ लब्धि और ५८ शेष है।

सिद्धान्त (२)—दशमलव के अभिन्न भाग में जिस तरह बांई ओर के अंक के गुणक का $\frac{१}{१०}$ उसके समीप के दांई ओर के अंक का गुणक होता है, उसी तरह उसके भिन्न भाग में भी बांई ओर के अंक के गुणक का $\frac{१}{१०}$ उसके निकटवर्ती दांई ओर के अंक का गुणक होता है। जैसे,

$$५२८·३७१ = \frac{५२८३७१}{१०००}$$

$$= \frac{५०००००}{१०००} + \frac{२००००}{१०००} + \frac{८०००}{१०००} + \frac{३००}{१०००} + \frac{७०}{१०००} + \frac{१}{१०००}$$

$$= ५०० + २० + ८ + \frac{३}{१०} + \frac{७}{१००} + \frac{१}{१०००}$$

$$= ५ \times १०० + २ \times १० + ८ \times १ + ३ \times \frac{१}{१०} + ७ \times \frac{१}{१००} \times १ \times \frac{१}{१०००}$$

इस सिद्धान्त के अनुसार किसी दशमलव भिन्न को पढ़ने में उसके अभिन्न भाग को अभिन्न संख्या की तरह और भिन्न भाग की बांई ओर के अन्तिम अंक को दशांश के साथ तथा उसकी दांई ओर के दूसरे अंक को शतांश के साथ और उसकी दांई ओर के तीसरे अंक को सहस्रांश के साथ, इस क्रम से पढ़ना चाहिये। किन्तु दशमलव के भिन्न भाग में सबसे अन्तिम स्थान का जो छेद होगा, उसके साथ उस दशमलव को अभिन्न संख्या की तरह पढ़ने का अधिक प्रचार है।

जैसे, १२७·७३५ इसको एक सौ सत्ताईस पूर्णांक, सात दशांश, तीन शतांश पांच सहस्रांश इस तरह पढ़ना चाहिये। अथवा इसको, एक लाख सत्ताईस हजार सात सौ पैंतीस सहस्रांश, इस तरह भी पढ़ सकते हैं।

नोट (१)—ऊपर के सिद्धान्त से स्पष्ट मालूम होता है कि दशमलव के भि भाग में बांई ओर से दांई ओर के अंकों का मान उत्तरोत्तर बहुत स्वल्प है है। इसलिये जिस दशमलव संख्या में दशमलव स्थान अधिक होते हैं, उस दशमलव बिन्दु की दांई ओर के थोड़े से अंक रख कर यदि शेष अंक हटा दि जांय तो भी उस हटाये हुए अंक वाले दशमलव संख्या का मान मूल दशम संख्या के मान के आसन्न ही रहेगा। किन्तु यहां यह ध्यान में रखना चाहिये हटाये हुए अंकों में बांई ओर का अन्तिम अंक यदि ० से ४ तक का कोई होगा तो शेष दशमलव की दांई ओर के अन्तिम अंक में कुछ परिवर्तन न क चाहिये। परन्तु यदि वह अंक ५ से ९ तक का कोई अंक होगा तो शेष दशम की दांई ओर के अन्तिम अंक में १ अवश्य जोड़ देना चाहिये। जिस से दशमलव का मान मूल दशमलव के मान के अधिक निकट रहेगा।

जैसे, ३·१२३९५६ इस में यदि ९५६ इन अन्तिम अंकों को हटा दि जाय तो ३·१२४ इस का मान ३·१२३ इसके मान से मूल दशमलव के मान अधिक निकट होगा।

सिद्धान्त (३)—दशमलव संख्या के भिन्न भाग के आगे चाहे जितने शू रखने पर भी उस का मान बदलता नहीं।

जैसे, ·३, ·३०, ·३००, ·३०००, यह सब क्रम से $\frac{३}{१०}$, $\frac{३०}{१००}$, $\frac{३०...}{१०...}$ $\frac{३०००}{१००००}$, इन के समान होने से इन का मान ·३ वा $\frac{३}{१०}$ यही होता है, यह स्पष्ट

नोट (१)—यदि किसी अभिन्न संख्या को दशमलव के रूप में लिखना तो उस अभिन्न संख्या की दांई ओर दशमलव बिन्दु रख कर उसके आगे शू रखने चाहियें।

जैसे, १२ = १२·००।

नोट (२)—यदि किसी दशमलव भिन्न को १० वा १० के किसी घात गुणना हो तो गुणक में १ के ऊपर जितने शून्य होंगे उतने स्थान दशमलवबि को दांई ओर हटाने से गुणन फल सिद्ध होगा।

जैसे, २३·१७३ × १० = २३१·७३, २३·१७३ × १०० = २३१७·३।

इसी तरह यदि किसी दशमलव भिन्न को १० वा १० के किसी घात

ाग देना हो तो भाजक में १ के ऊपर जितने शून्य होंगे उतने स्थान दशमलव-बिन्दु को बांई ओर हटाने से भागफल सिद्ध होगा।

जैसे, २३·१७३ ÷ १०० = ·२३१७३, २३·१७३ ÷ १००० = ·०२३१७३।

उदाहरणमाला (२४)

निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव के रूप में लिखो।

(१) $\frac{९}{१०}$, $\frac{१७}{१००}$, $\frac{८३}{१०}$, $\frac{१०३}{१००}$, $\frac{१}{१००}$, $\frac{२९}{१०००}$, $\frac{७२८१}{१००}$, $\frac{७७७१}{१०}$।

(२) सात दशांश; एक शतांश और पांच सहस्रांश; आठ दश सहस्रांश, बारह पूर्णांक चार शतांश और छ लक्षांश; सौ पूर्णांक पांच दशांश और दो सहस्रांश।

निम्नलिखित संख्याओं को १० और १००० से गुण दो और भाग दो।

(३) ४७, ·७, ·०३, ३·६, ६·०१, २·००७, ७०००, १२८·२, २३·४९, ·०००१।

(४) ·००००३ इसको १०००० इससे गुणने पर गुणन फल क्या होगा?

(५) १०००० इसको १०००००० इससे भाग देने पर भागफल क्या होगा?

दशमलव को भिन्न संख्या में परिवर्तित करने का प्रकार।

(१३७) दशमलवबिन्दु को हटा कर शेष अंकों को अंश स्थान में रखो। और छेद के स्थान में १ के आगे उतने शून्य रखो जितने दशमलवबिन्दु के आगे स्थान होंगे। यदि दशमलवबिन्दु की बांई ओर कोई अंक न होंगे और उसकी दांई ओर कुछ शून्य होंगे तो उन शून्य के सहित दशमलवबिन्दु को हटा कर शेष अंकों को अंश के स्थान में रखो और छेद के स्थान में १ के आगे उतने शून्य लिखो जितने उस दशमलव संख्या में दशमलवस्थान होंगे।

जैसे, ·२४५७ इसको भिन्न संख्या में परिवर्तित करना हो तो यहां ·२४५७= $\frac{२४५७}{१००००}$, क्योंकि, ·२४५७ = $\frac{२}{१०} + \frac{४}{१००} + \frac{५}{१०००} + \frac{७}{१००००}$ (इसको समच्छेद का रूप देकर) = $\frac{२००० + ४०० + ५० + ७}{१००००} = \frac{२४५७}{१००००}$।

इसी तरह ·००२४५ = $\frac{२४५}{१०००००}$ और ३२·२४५ = $\frac{३२२४५}{१०००}$

नोट (१)—दशमलवबिन्दु की दांई ओर के प्रत्येक शून्य के लिये उसका मान दसगुना कम होता है।

जैसे, ·२४५ = $\frac{२४५}{१०००}$, ·०२४५ = $\frac{२४५}{१००००}$ और ·००२४५ = $\frac{२४}{१०००}$

नोट (२)—जब कि अभिन्न संख्या की तरह दशमलव के भिन्न भा भी अंकों का संनिवेश दशक पद्धति से होता है । इसलिये उनके संकलन, व कलन, गुणन और भजन यह सब कृत्य अभिन्न संख्या की तरह सुलभ रीति किये जा सकते हैं ।

उदाहरणमाला (२५)

निम्नलिखित दशमलवों को भिन्न संख्या के अति संक्षिप्त रूपों में लिखो ।

(१) ·२; ·०२५; ·२८८; ·०५२५; ·००३७५; ५·२५; ७·२२५; ७२ ·७२२५; ·०००७२२५ ।

निम्नलिखित भिन्न संख्याओं को दशमलव भिन्नों में लिखो ।

(२) $\frac{१}{१०}$; $\frac{१७}{१००}$; $\frac{५२३}{१०००००}$; $\frac{२०३}{१०}$; $\frac{५००३}{१००}$; $\frac{५००३}{१००००००}$; $\frac{५०२३४}{१०००}$

निम्नलिखित उदाहरणों के मान दशमलव भिन्नों में लिखो ।

(३) ·००५ × १०; ·००५ × १००; ·०४ × १००००; २३४५ × १ २३·४५ × १००००; २·३४५ × १००००० ।

(४) २७५·२ ÷ १०; ३४·६५ ÷ १००; ४५६·७ ÷ १०००; ३४५·६ ÷ १००; ७४·३४ ÷ १०००; ७·३४५ ÷ १०००० ।

(५) २३·१२३४५६७ इसमें प्रत्येक अंक का स्थानीयमान बताओ ।

दशमलव का संकलन

(१३८) दशमलव संख्याओं को एक के नीचे एक इस क्रम से लि जिससे सब संख्याओं के दशमलवबिन्दु एक ही ऊर्ध्वाधर पंक्ति में रहेंगे । तरह संख्याओं को लिखने से उनके अभिन्न भागों के एक, दश आदि स्थानों अंक तथा भिन्न भागों के दशांश, शतांश आदि स्थानों के अंक अपने सजातीय स्थानों के ऊर्ध्वाधरपंक्ति में रहेंगे । यदि किसी संख्या में कुछ स्था का अभाव होगा तो उन स्थानों में शून्यों की कल्पना करो । तब उन संख्याओं नीचे एक आडी रेखा बनाकर उनका योग अभिन्न संख्याओं के योग की त करो । और योगफल को रेखा के नीचे लिखकर दशमलवबिन्दु को दशमल बिन्दुओं के ऊर्ध्वाधरपंक्ति के ठीक नीचे योग के स्थान में लिखो ।

उदाहरण—५·२४५, १३·०१, ·५७३, ९·७८५ इनका योग करो।

न्यास,
```
 ५·२४५
१३·०१
  ·५७३
 ९·७८५
-------
२८·६१३ योग
```

यहां तीन दशमलव संख्याओं में दशमलव स्थान तीन हैं। और १३·०१ इसमें दो हैं। अतः इसके आगे शून्य की कल्पना की है। और ·५७३ इस में पूर्णांक कोई न होने से पूर्णांक के एक स्थान में शून्य की कल्पना करके योग किया है। और यहां दशांश स्थानों के अंकों का योग १६ अर्थात् $\frac{१६}{१०}$=१·६ अतः ६ को दशांश स्थान में रखकर हाथ के १ को अभिन्न संख्या के एक स्थान के ऊर्ध्वाधरपंक्ति में जोड़ दिया है।

उदाहरणमाला (२६)

निम्नलिखित संख्याओं का योग करो।

(१) ·२३४ + १४·३८१२ + ·०१ + ३२ ४७ + ·०००७५।

(२) १४·९४ + ·००८५७ + १·५ + ५६०७·२५ + ·००५७।

(३) ६·३०८४ + ·००६ + ·२०७ + ·०००१ + ·००८०२२।

(४) २·७४ + ·०७५ + १०३·००३७५ + ·०००५४९५ + ५।

(५) ·०००४९३ + ३·२४ + १५ + ४२·६ + ३२४·४२०३७।

(६) ४९·३२७ + ·४५८ + ·०५ + ३४१·८७५ + ३·४९६२।

(७) तीन सौ उनासी सहस्रांश, पैंतालीस हजार छ सौ सतासी लक्षांश, छत्तीस दश सहस्रांश और चौहत्तर सहस्रांश इनका योग करो।

दशमलव का व्यवकलन।

(१३९) वियोज्य संख्या के नीचे वियोजक संख्या को ऐसा लिखो जिससे दोनों संख्याओं के दशमलवबिन्दु एक ही ऊर्ध्वाधर पंक्ति में रहेंगे। और यहां किसी संख्या में दशमलव स्थान कम हों तो उन स्थानों में शून्यों की कल्पना करो। तब उनके नीचे आडी रेखा खींच कर अभिन्न सांख्या की तरह उनका

अन्तर करो। और उस अन्तर को रेखा के नीचे लिखकर दशमलवबिन्दु [illegible] दशमलवबिन्दुओं के ऊर्ध्वाधर पंक्ति के ठीक नीचे अन्तर के स्थान में लिखो।

उदाहरण—७·३२ इसमें से ४·५३७ इसको घटाओ।

७·३२ वियोज्य	यहां वियोज्य में सहस्रांश स्थान का अभाव [illegible]
४·५३७ वियोजक	अतः वहां शून्य की कल्पना कर के पूर्णांक सं[illegible]
२·७८३ अन्तर	की तरह उनका अन्तर किया है। और दशम[illegible] बिन्दु को दशमलव बिन्दुओं के ऊर्ध्वाधर पंक्ति[illegible] नीचे अन्तर के स्थान में लिखा है।

उदाहरणमाला (२७)

निम्नलिखित संख्याओं का अन्तर करो।

(१) ५·२१८ — ·४२९; ९·००५ — ७·४६२; ·८ — ·७९९।

(२) ५३·३१६ — ५·०८६७; ६·०४७ — ५·९८६३; ३ — ·९९९।

(३) ७५·२०४ — ३·००२४; ४·३ — ·८५६७१; २४ — ·२४२४।

(४) ·०४५६ — ·००४५६; ४६·००२ — ३·५९२०३५७।

(५) ५·००२००३ — ·००३४५; ७·२५ — ६·७५२५०५।

(६) १ — ·३२४५; ५·१ — १·००९; ·७ — ·००५००७३।

(७) ९·३४५ — ८·७५७२; ·१०१ — ·००१; ५·३ — १·००३।

निम्नलिखित का मान निकालो।

(८) ७०० — ·००७ — ·७०७८ — ३·१२३४५ + ·०००२५।

(९) २००० — (·०७९ + ३·६७००२ — ३·००१२)

(१०) १·३४५ — ·०७२ — (३·१२३ — ३०·३२१) + १००।

(११) १·३४५६ और १·३४५७ इन दो संख्याओं में १·३४५६७८ इ[illegible] अधिक निकट कौनसी संख्या है?

दशमलव का गुणन।

(१४०) गुण्य और गुणक को अभिन्न संख्या मान कर उनका गुणन [illegible] अभिन्न संख्या की तरह सिद्ध करो। और गुण्य और गुणक में जितने दशम[illegible]

स्थान होंगे उनके योग के इतने दशमलव स्थान गुणन फल की दांई ओर के अन्तिम अंक से गिनकर उनके आगे दशमलव बिन्दु को लिखो। यदि गुणन फल में उतने दशमलव स्थान न होंगे तो उसकी बांई ओर शून्य लिखकर उन स्थानों की पूर्ति करो। और उस के आगे दशमलव बिन्दु को लिखो। यही अभीष्ट गुणन फल होगा।

उदाहरण—(१) ४·२५ इस को ·३५ इस से गुण दो।

न्यास—४·२५ गुण्य	यहां गुण्य में २ और गुणक में २ मिलकर ४
× ·३५ गुणक	दशमलव स्थान गुणनफल में होने चाहिये। अतः
२१२५	१४८७५ इस गुणनफल में दाहिनी तरफ से ४
१२७५	स्थान गिनकर उनके आगे दशमलव बिन्दु
१·४८७५ गु० फ०	रखा है।

उदाहरण—(२) ·४२३ इसको ·००३२ इससे गुणा करो।

न्यास—·४२३ गुण्य	यहां उक्त नियम से गुणनफल में ३ + ४ = ७
× ·००३२ गुणक	दशमलव स्थान होने चाहिये। किन्तु गुणन-
८४६	फल में केवल ५ ही दशमलव स्थान हैं। अतः
१२६९	गुणनफल की बांई ओर २ शून्य लिखकर उस
·००१३५३६ गु० फ०	के आगे दशमलव बिन्दु को लिखा है। क्योंकि,

$$·४२३ \times ·००३२ = \frac{४२३}{१०००} \times \frac{३२}{१००००}$$

$$= \frac{१३५३६}{१००००००००} = ·००१३५३६।$$

उदाहरणमाला (२८)

निम्नलिखित संख्याओं का गुणनफल क्या होगा?

(१) ७·५ × ४·७; ३·६२ × ५·२३; ·४२७ × ·२३५, ३·८ × ४२।

(२) ·३८ × ·४२; ३·८ × ४·२; ·०३८ × ·००४२; ·५ × १००।

(३) ४·०७ × ९·१६; ४७६ × ·०००२६; २७·३५ × ७·००७।

(४) ३·००७०४ × ४·०२०५; ·०००९ × १०००; ५० × ·५।

(५) ६२३·४०७५ × २४·०२५९; ·००७४६ × ·००६२३५।

निम्नलिखित का मान लिखो।

(६) ·२५ × ·२५ × ·२५।

(७) ११ × १·१ × ·११ ।

(८) ·०००५ × ·००५ × ·०५ ।

(९) ७ × ·७ × ·०७ × ७०००

(१०) $(६·२५)^{२} - (·५)^{3}$

(११) (२·७ + ३१·८५) × (३·१६ − ·३१६)

(१२) (१०७·८ + ६·५४१ − ३१·९६) १·७४२ ।

दशमलव का भागहार

(१४१) भाज्य और भाजक दोनों के दशमलव स्थानों की संख्या तु होगी तो उन दोनों को अभिन्न संख्या मानकर अभिन्न संख्या की तरह भ भागफल सिद्ध करो । और जहां उनके दशमलव स्थानों की संख्या तुल्य न वहां शून्य रख कर उनके दशमलव स्थानों की संख्या तुल्य बना लो । यदि में कुछ शेष न बचेगा तो लब्धि अभिन्न संख्या होगी । और यदि कुछ शेष ब तो उस शेष पर तब तक शून्य रखकर उसमें भाजक का भाग देते जाओ जब भाज्य निःशेष न होगा । अथवा लब्धि के स्थान में अभीष्ट दशमलव स्थान होंगे । यहां यह स्मरण रखना चाहिये कि अन्तिम शेष पर शून्य रखने के जो लब्धि के स्थान में अंक आवेंगे उनको दशमलव बिन्दु के बाद रखना च अर्थात् यहां से आगे का लब्धि का भिन्न भाग और इसके पहिले का लब्धि अभिन्न भाग होगा ।

उदाहरण—(१) ३९८·१८७ इसमें ·८७९ इसका भाग दो ।

भाजक भाज्य लब्धि

न्यास—८७९) ३९८१८७ (४५३
३५१६
४६५८
४३९५
२६३७
२६३७
००००

यहाँ भाज्य और भाजक दशमलव स्थान तुल्य होने से अ संख्या की तरह उनका भाग निकाला है । और यहां कुछ शेष बचा है । अतः ४५३ यह अ लब्धि है । क्योंकि, ३९८·१८७ ÷ ·८७९ = $\frac{३९८१८७}{१०००} \div \frac{८७९}{१०००}$

$\frac{३९८१८७}{१०००} \times \frac{१०००}{८७९} = ४५३$

उदाहरण—(२) ३१·२५ इसमें १२·५ इसका भाग दो।

भाजक भाज्य लब्धि

न्यास—१२५०) ३१२५ (२·५
२५००
६२५०
६२५०
००००

यहां भाज्य में २ और भाजक में १ दशमलव स्थान है। अतः भाजक के आगे १ शून्य लिखकर उनके दशमलव स्थानों की संख्या तुल्य की है। और अन्तिम शेष ६२५ इस पर १ शून्य लिखकर आगे भाग की क्रिया की है। एवं लब्धि के ५ इस अंक को दशमलव बिन्दु के बाद रखा है। अतः लब्धि का २ यह अभिन्न भाग और ·५ यह भिन्न भाग है।

उदाहरण—(३) ·५२ इसमें २७१ इसका भाग ४ दशमलव स्थान तक दो।

भाजक भाज्य लब्धि

न्यास—२७१००) ५३ (०·००१९
०
५३०
०
५३००
०
५३०००
२७१००
२५९०००
२४३९००
१५१००

यहां उक्त नियम से भाज्य और भाजक के दशमलव स्थानों को समान बनाया है, तब ५२ इस अन्त्यभाज्य में भाजक का भाग नहीं लगता। अतः लब्धि के अभिन्न भाग के स्थान में शून्य रखकर ५३ इस अन्त्यभाज्य पर शून्य लिखा। तब ५३० इस अन्त्यभाज्य में भी भाजक का भाग नहीं लगता है। अतः लब्धि के स्थान में दशमलव बिन्दु के बाद शून्य को लिखकर ५३० इस अन्त्यभाज्य पर और एक शून्य रखा। फिर भी ५३०० इस अन्त्यभाज्य में भाजक का भाग नहीं लगता है। अतः ५३०० इस पर और एक शून्य लिखकर लब्धि के

स्थान में पहिले रखे हुए शून्य के बाद दूसरा शून्य रखा। इसके बाद लब्धि स्थान में ४ दशमलवस्थान आने तक भाग की क्रिया की है। यहां लब्धि अभिन्न भाग में शून्य पूर्णांक को प्रायः नहीं लिखते हैं।

साधारण भिन्न को दशमलव का रूप देने का प्रकार।

(१५९) जिस भिन्न संख्या का छेद १० वा १० का कोई घात नहीं है ऐसे भिन्न को दशमलव संख्या में परिवर्तित करना हो तो पहिले उस भिन्न अति संक्षिप्त रूप देकर उसके अंश में दशमलव भिन्न के नियम से छेद का भाग तब तक दो जब तक भाज्य निःशेष न होगा अथवा जब तक लब्धि के स्थान अभीष्ट दशमलव स्थान न होंगे। इसी प्रकार किसी मिश्र भिन्न को दशमलव रूप देना हो तो पहिले उस मिश्र भिन्न को विषम भिन्न में परिणत करके तब क्रिया करनी चाहिये।

उदाहरण (१) $\frac{६}{६४}$ इसको दशमलव संख्या का रूप दो।

भाजक भाज्य लब्धि

न्यास—३२) ३ (०.०९३७५
०
३०
०
३००
२८८
१२०
९६
२४०
२२४
१६०
१६०
...

यहां $\frac{६}{६४} = \frac{३}{३२}$ और इस उदा॰ में ५ वार अन्त्यभाज्य पर शून्य र॰ से भाज्य निःशेष हुआ है, अतः ल॰ के स्थान में ५ दशमलव स्थान हैं।

उदाहरण—(२) $\frac{१}{३}$ इसको ऐसे दशमलव में परिवर्तित करो जिस में दशमलव स्थान चार होंगी।

न्यास—३) १ (·३३३३

```
३) १ (·३३३३
   ०
   ――
   १०
    ९
   ――
   १०
    ९
   ――
   १०
    ९
   ――
   १०
    ९
   ――
    १
```

यहां लब्धि में ४ दशमलव स्थान इष्ट हैं, अतः ४ बार अन्त्य-भाज्य पर शून्य रख कर भाग की क्रिया की है।

उदाहरणमाला (२६)

(१) १·२९६ ÷ ·१०८; १७·२८ ÷ ·००१२; ·००१६८ ÷ ·२ ।

(२) २९२१ ÷ ·२३; १५६३३·००६२ ÷ ३६२·९; १ ÷ ·०१ ।

(३) १०·८३६ ÷ ५·१६; ३४·९७५८ ÷ ·३८१; २५ ÷ ·०४ ।

(४) ·०००८१ ÷ २७; १·७७०८९ ÷ ४·७३५; १·२ ÷ ६२५ ।

(५) १ ÷ ·१ ÷ ·०१ ÷ ·०००१; ३१·५ ÷ ·१२६; ५·२ ÷ ३२ ।

(६) ·००००५ ÷ २·५ ÷ २५ ÷ ·००००२५; ७·४५ ÷ ३२ ।

(७) १·६९ ÷ १·३ ÷ ·१३ ÷ १० ÷ ·००१; ·०९८४४ ÷ ·४६ ।

निम्नलिखित उदाहरणों में ५ दशमलव स्थान तक लब्धि को बताओ।

(८) ३·४६१ ÷ ·०२७; ·३१२५ ÷ ·०६; ·२ ÷ ·००६ ।

(९) ·०००७५३ ÷ ·००९; ·००००००१ ÷ ·००००४३१ ।

(१०) ·५ ÷ ७६·९१३४२; ४००० ÷ ·०००१२१ ।

इनको सरल करो।

(११) $\frac{·००७५ \times २·१}{·०१७५}$ (१२) $\frac{१·१८}{·१५२} \times \frac{३·०४}{२·९५}$ (१३) $\frac{·०८१ \times ५·७}{१·७१}$

दशमलव भिन्न में परिवर्तित करो।

(१४) १/४; ३/८; ९/१६; ७/२५; ३१/३२; ३२/१२५; २५/१२८; ८२५/५१२; ७२३/४०९६।

(१५) ३ २५/२५६; ५ ७५/१२८; १ ७/१६; ३ ३/३२, ९ २१/२४; ३ ७/२५;

पांच दशमलव स्थान तक लब्धि क्या होगी ?

(१६) १/६; २/७; ३/११; २/१३; १ ५/९; ७ २/११; ८ ७/२५; १० १०/२९।

दशमलव भिन्न में परिणत करो।

(१७) ४/५ का ·०२७ (१८) ·०२५ का ४ १/२ (१९) १/२ का ३/४ × ८

(२०) १/४ का १/१० ÷ ·०५ का २ १/२

दशमलव का महत्तमसमापवर्तक और लघुतमसमापवर्त्य।

(१४३) दी हुई संख्याओं के दशमलव स्थानों को तुल्य बना अर्थात् उनको सजातीय दशमलवभिन्नों में परिवर्तित करो। तब नयी संख्याओं को अभिन्न संख्या मान कर अभिन्न संख्या के नियम से इनकी महत्तमसमापवर्तक और लघुतमसमापवर्त्य की संख्या होगी उनमें दाहिनी के अन्तिम अंक से बांई ओर उतने स्थान गिन कर दशमलव बिन्दु रखो जि नयी संख्याओं में से प्रत्येक में दशमलव स्थान होंगे। यही उन दी हुई संख्या का क्रम से महत्तमसमापवर्तक और लघुतमसमापवर्त्य होगा।

उदाहरण—२·४; ·३६; ७·२ इनका महत्तमसमापवर्तक और लघुत समापवर्त्य क्या होगा ?

यहां पहिली और तीसरी संख्या में एक ही दशमलवस्थान है, अतः इन दांई ओर एक एक शून्य रख कर २·४०; ·३६; ७·२०; इस तरह तीनों संख्या के दशमलवस्थान तुल्य बनाये। तब इनको अभिन्न संख्या मान कर इन महत्तमसमापवर्तक १२ और लघुतमसमापवर्त्य ७२० हुआ और नयी संख्या में तुल्य दशमलवस्थान २ हैं, अतः इनकी दाहिनी तरफ से बांई तरफ २ स्थ गिनकर दशमलव बिन्दु को रखने से ·१२ यह उनका महत्तमसमापवर्तक ७·२० वा ७·२ यह लघुत्तमसमापवर्त्य हुआ।

उदाहरणमाला (३०)

निम्नलिखित संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक और लघुतमसमापवर्त्य निका

(१) ३·७५, ७·२५ (२) ७२·१२, ·०३ (३) ·०२, ·४, ·००

(४) १·२, ·२४, ६ (५) १·६, ·०४, ·००५ (६) ·०८, ·००२, ·०००

(७) ३·९, ६·६, ८·२२ (८) १·५, ·२५, ·०७५

दशमलव भिन्न का संक्षिप्त गुणन।

(१४४) अभीष्ट दशमलव स्थान तक शुद्ध गुणनफल लाने के लिये पहिले गुण्य को लिखकर गुणनफल में जितने दशमलव स्थान अभीष्ट होंगे, उतने गुण्य के दशमलव बिन्दु की दाहिनी ओर स्थान गिनकर अन्तिम स्थान के नीचे गुणक के अभिन्न भाग के एक स्थान के अंक को लिखो। और उसकी दांई ओर गुणक के अभिन्न भाग के दश, शत आदि स्थान के अंकों को उलटे क्रम से लिखो। एवं गुणक के एक स्थान के अंक की बांई ओर उसके भिन्न भाग के दशांश, शतांश आदि स्थान के अंकों को उलटे क्रम से लिखो। तब उनके नीचे एक रेखा करो। इस तरह गुण्य गुणक को लिखने से गुणक के प्रत्येक अंक से गुण्य को गुण देने से गुणनफलों में अभीष्ट दशमलव स्थान ही होंगे, यह थोड़ा विचार करने पर तुरन्त मालूम हो सकता है। अतः सब गुणनफलों को रेखा के नीचे इस तरह लिखो जिससे प्रत्येक गुणनफल के एक, दश आदि स्थान के अंक दूसरे गुणनफल के एक, दश आदि स्थानों के अंकों के ठीक ऊपर रहेंगे। किन्तु यहां गुण्य के अभीष्ट दशमलव स्थान के बाद जो अंक छूट जाते हैं उनकी कसर निकालने के लिये प्रत्येक गुणनफल में हाथ के दशक भी जोड़ने पड़ते हैं। वह इस तरह से कि गुणक के जिस अंक से गुण्य को गुणा जायगा उस अंक के ऊपर वाले गुण्य के अंक की दांई ओर जो अंक होगा उसको गुणक के उस अंक से गुण दो। तब जो गुणनफल होगा वह यदि ० से ४ तक होगा तो हाथ के कुछ नहीं होते हैं। यदि वह ५ से १४ तक हो तो हाथ के १; १५ से २४ तक हो तो हाथ के २; २५ से ३४ तक हो तो हाथ के ३; ३५ से ४४ तक हो तो हाथ के ४ इसी क्रम से आगे हाथ के अंक लेने चाहिये। अब सब गुणनफलों के नीचे दूसरी रेखा करके उसके नीचे उन सबका योग लिखो। इस योग की दांई ओर से बांई ओर अभीष्ट दशमलव स्थान गिनकर उनके आगे दशमलव बिन्दु लिखने से वही अभीष्ट दशमलव स्थान तक का गुणनफल होगा।

उदाहरण (१) ४७·५२९९८ को २६·३४९२ इससे गुण दो, जिससे गुणनफल तीन दशमलव स्थान तक शुद्ध होगा।

संक्षिप्तरीति	प्रचलितरीति
४७·५२९९८	४७·५२९९८
२९·४३६२	२६·३४९२
९५०६००	९५०५९९६
२८५१७९	४२७७६९८२
१४२५८	१९०११९९२
१९०१	१४२५८९९४
४२८	२८५१७९८८
९	९५०५९९६
१२५२·३७५	१२५२·३७६९४९०१६

यहां २ दशमलव स्थान हैं, अतः गुण्य के तीसरे दश स्थान के ९ इस अंक के नीचे गुण अभिन्न भाग के एक स्थान के अंक को लिखकर उसकी दांई ओर स्थान के २ इस अंक को लिखा। ६ इसकी बांई ओर दशांश, आदि स्थान के ३४९२ इन अंकों उलटे क्रम से लिखा है। अब की दांई ओर के २ इस अंक से गुण कर हाथ के २ को २ ४७५२९९ के गुणनफल में जोड़ पहिला गुणनफल सिद्ध किया है। ६ से ९ को गुणकर हाथ के ५ और ४७५२९ के गुणनफल में जोड़ कर दूसरा गुणनफल भया है। एवं ३ को गुण कर हाथ के २ को २ और ४७५२ के गुणनफल में जोड़ कर त गुणनफल भया है। और ४ से २ को गुण कर हाथ के १ को ४ और ४७ गुणनफल में जोड़कर चौथा गुणनफल भया है। इसी तरह आगे के गुण सिद्ध किये हैं।

उदाहरण (२) ८·३८७४ को ·००३२ इससे इस तरह गुणो, जिससे गु फल में ५ दशमलव स्थान होंगे।

न्यास, ८·३८७४०
 २३०००
 २५१६
 १६८
 ·०२६८४

यहां गुण्य में ४ ही दशमलव स्थान हैं, गुण्य की दांई ओर एक शून्य रखकर उस के नीचे गुणक के अभिन्न भाग के एक स्था शून्य को रखा। और उस शून्य की बांई गुणक के भिन्न भाग के दशांश, शतांश स्थानों के अंकों को उलटे क्रम से लिखा है। स्पष्ट प्रतीति के लिये शून्य लिखे हैं। किन्तु लिखने का प्रचार नहीं है।

नोट—यहां यह भी जानना चाहिये कि इस संक्षिप्त गुणन की रीति से लाये हुए गुणनफल की दांई ओर के अन्तिम अङ्क में कभी कभी एक वा दो अंकों का अन्तर रह जाता है। जैसे ऊपर के उदाहरण (१) में हुआ है। अतः गुणनफल में जितने दशमलव स्थान अभीष्ट होंगे उनमें १ जोड़ कर उतने अभीष्ट दशमलव स्थान कल्पना करके यदि ऊपर की क्रिया से गुणनफल सिद्ध किया जायगा तो अभीष्ट दशमलव स्थान के अङ्कों में प्रायः कुछ अन्तर न रहेगा।

दशमलव भिन्न का संक्षिप्त भागहार।

(१४५) दशमलव संख्याओं के भागहार का एक लघु प्रकार ऐसा है कि जिससे लब्धि में अभीष्ट दशमलव स्थान आते हैं।

पहिला प्रकार—पहले दशमलव के भागहार की सामान्य रीति से अनुमान करके जान लो कि लब्धि में अभिन्न स्थान कितने होंगे। तब उन स्थानों की संख्या को लब्धि में जितने दशमलव स्थान अभीष्ट होंगे उनकी संख्या में जोड़ दो और उस योग के इतने भाजक में बांई ओर के पहिले अंक से दाहिनी ओर स्थान गिन कर वहां एक चिह्न करो। तब उस चिह्न की बांई ओर के अङ्कों को भाजक कल्पना कर उसका भाज्य के अन्त्य भाज्य में भाग दो। और शेष जान लो। फिर उस कल्पित भाजक की दांई ओर का अन्तिम अङ्क छोड़ कर शेष भाजक का उस शेष में भाग दो। इस तरह भाजक का एक एक अङ्क छोड़ते हुए अन्त तक भाग दो। तब लब्धिस्थान में जो अङ्क होंगे उनकी दांई ओर से बांई ओर अभीष्ट दशमलव स्थान गिन कर दशमलव बिन्दु को लिखो। यही अभीष्ट लब्धि होगी। यहां पर भी लब्धि के प्रत्येक अङ्क से भाजक के खण्ड को गुणने में उस खण्ड की दांई ओर छोड़े हुए अङ्क को पहिले गुण कर हाथ के दशक का अङ्क उसी तरह से लो जैसे पूर्व कथित संक्षिप्त गुणन की रीति में बतलाया गया है।

उदाहरण (१) १२५४·४६४०२ इसमें ४६·२०५१७५ इसका भाग लब्धि में ४ दशमलव स्थान आने तक दो।

उक्त प्रकार से भाजक में चिह्न करके न्यास।

भाजक भाज्य लब्धि
४६२०५१,७५) १२५४४६४,०३ (२७·१४९८
९२४१०३
३३०३६१
३२३४२६
६९२५
४६२१
२३०४
१८४८
४५६
४१६
४०
३७
३

यहां पहिले भाज्य भाजक दशमलव स्थान समान करने पर मा हुआ कि लब्धि में अभिन्न स्था होंगे। अतः २ में अभीष्ट दश स्थान ४ को जोड़ने से ६ होते अतः भाजक की बांई ओर के अ अङ्क से ६ स्थान गिनकर उनके (,) ऐसा चिन्ह किया है। और चिन्ह की बांई ओर के ४६२०५१ भाजक खण्ड को भजक कल्पना क उसका अन्त्य भाज्य में भाग देने से लब्धि २ आती है। अतः २ को भाजक छोड़े हुए ७ इस अङ्क से गुणने पर हाथ के १ को २ और ४६२०५१ इनके गु फल में जोड़ कर योग को पहिले अन्त्य भाज्य में घटाया। तब ३३०३६१ शेष बचा। यह दूसरा अन्त्य भाज्य हुआ। फिर भाजक की दांई ओर के १ अन्तिम अङ्क को छोड़ कर ४६२०५ इस भाजक के खण्ड से भाग देने पर ल ७ आती है। अतः ७ को भाजक के छोड़े हुए १ इस अङ्क से गुण देने पर के १ को ७ और ४६२०५ इनके गुणन फल में जोड़ कर योग को दूसरे अ भाज्य में घटाया। तब ६९२५ यह शेष बचा। इसी तरह अन्त तक क्रिया क से लब्धि के स्थान में २७१४९८ यह अङ्क हुए। इनकी दांई ओर के अ अङ्क से बांई ओर ४ अभीष्ट दशमलव स्थान गिन कर उनके आगे दशमलव वि रखने से २७·१४९८ यह अभीष्ट लब्धि हुई।

दूसरा प्रकार—जब भाज्य का मान भाजक के मान से छोटा होता है।

रीति—यहां पहिले देखो कि भाज्य में कितने स्थान तक दशमलव बिन्दु दांई ओर हटाने से लब्धि में अभिन्न स्थान एक आवेगा तब उतने स्थानों संख्या में १ घटा कर शेष को, लब्धि में जितने दशमलव स्थान अभीष्ट

उनकी संख्या में घटा दो। और जो शेष बचेगा उतने भाजक में बांई ओर के अन्तिम अङ्क से दांई ओर स्थान गिन कर उनके आगे चिह्न करो। और सब क्रिया पूर्ववत् ही करो।

उदाहरण (२) ९१३·०८ इस में २१३७·२ इसका भाग तीन दशमलव स्थान तक दो।

उक्त प्रकार से भाजक में चिह्न करके न्यास।

भाजक भाज्य लब्धि
२१३,७२) ९१३,०८ (·४२७
८५५
५८
४३
१५
१५
×

यहां भाज्य में दशमलव बिन्दु को एक स्थान दांई ओर हटाने से लब्धि में एक अभिन्न स्थान आता है। अतः १ को १ में घटाने से ० शेष को लब्धि में अभीष्ट दशमलव स्थान संख्या ३ में घटाने से ३ यह शेष बचा। अतः भाजक की बांई ओर के अन्तिम अङ्क से दांई ओर ३ स्थान गिन कर उनके आगे चिह्न किया है, और सब क्रिया पहले प्रकार के अनुसार ही की है।

उदाहरणमाला (३१)

संक्षिप्त रीति से गुणन फल और भाग फल लाओ।

(१) ·७९४६ इसका और ·६२५३ इसका गुणन फल ४ दशमलव स्थान तक बताओ।

(२) ४२·६५ को २८·२७ से गुण कर गुणन फल दो दशमलव स्थान तक लाओ।

(३) ८४·३०४९ को ·५४७ इससे ऐसा गुणो कि गुणन फल में दशमलव स्थान दो होंगे।

(४) ४९·६९१ इसको ४०·२४९ इससे ऐसा गुणो जिससे गुणन फल में दशमलव स्थान शून्य होगा।

(५) ४२३·९२१७६८ इसमें ५७·३४५ इसका २ दशमलव स्थान तक भाग दो।

(६) ९८४·०७२९३१७२४ इसमें ३६९·१४८९ इसका ४ दशमलव स्था
तक भाग दो।

(७) ·२१०५२२३५१ इसमें ·१५४८३ इसका दो दशमलव स्थान
भाग दो।

(८) १८२०४·२६२३३९४८ इसमें ६२५·४८३६ इसका इस तरह भाग
जिससे लब्धि में दशमलव स्थान शून्य होगा।

आवर्तदशमलव

(१४६) (१४२) प्रक्रम के अनुसार साधारणभिन्न को दशमलव
का रूप देने के लिए उस साधारण भिन्न को अतिसंक्षिप्तरूप देने के बाद हम
अंश की दाईं ओर शून्य रखते हैं, अर्थात् उस साधारण भिन्न के अंश को
१० वा १० के किसी घात से गुण देते हैं। किन्तु १० के २ और ५ यह
गुणन खण्ड होने से अंश में छेद का निःशेष भाग जाने के लिये २ और ५
२ और ५ के किसी घात के तुल्य छेद होना चाहिये। यदि ऐसा छेद न हो
अंश पर चाहे जितने शून्य रखने पर भी लब्धि का अन्त कभी न होगा।
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{11}$, इन साधारण भिन्नों को दशमलव भिन्न का रूप देने पर यहां
का अन्त कभी न होगा। इनके रूप निम्नलिखित होंगे।

$\frac{1}{3}$ = ·३३३३ इत्यादि; $\frac{1}{6}$ = ·१६६६६ इत्यादि; $\frac{5}{11}$ = ·४५४५४५ इत्या

ऐसे दशमलवों को **आवर्तदशमलव** कहते हैं। **क्योंकि**, साधारण
को दशमलव भिन्न का रूप देने में प्रत्येक शेष छेद से कम होने के कारण
शेष १ से लेकर एकोनच्छेद तक कम हो सकेगा। तब शेष की संख्या मर्या
होने से वह कभी अंश के तुल्य अथवा पूर्व के किसी शेष के तुल्य होगी।
भाज्य पर शून्य रखने पर जब शेष अंश के तुल्य अथवा पहिले के किसी
के तुल्य होगा तब लब्धि आवर्त होगी अर्थात् लब्धि में बार बार वही
आवेंगे। आवर्तदशमलव के **शुद्धआवर्त** और **मिश्रआवर्त** ऐसे दो भेद होते

(१४७) शुद्धआवर्त दशमलव—जिस आवर्तदशमलव में दशमलव
के बाद ही वही वही अंक पुनः पुनः आते हैं उसको शुद्ध आवर्त दशमलव
हैं। जैसे, ·३३३३ इत्यादि; ·२४३२४३२४३ इत्यादि।

(१४८) मिश्रआवर्त दशमलव—जिस आवर्त दशमलव में दश

चिह के बाद कुछ आवर्त अंक नहीं होते हैं, किन्तु उन अनावर्त अंकों के बाद आवर्त अंकों का प्रारंभ होता है, ऐसे दशमलव भिन्न को मिश्र आवर्तदशमलव कहते हैं। जैसे, ·३६४५४५४५ इत्यादि।

(१४९) **आवर्त और अनावर्त अंक**—ऊपर लिखे अनुसार दशमलव भिन्न में वही अंक बार बार आवें तो उनको **आवर्तांक** कहते हैं और जो आवर्तांक नहीं उनको **अनावर्तांक** कहते हैं। जैसे, ·३६४५४५४५ इत्यादि। इसमें ४५ यह आवर्तांक और ३६ यह अनावर्त अंक हैं।

(१५०) **आवर्त दशमलवों का लेखन**—शुद्ध वा मिश्र आवर्त दशमलवों में एक ही अंक बार बार आवे तो पहिले ही अंक के ऊपर (·) ऐसा बिन्दु रखते हैं, परन्तु अंक समुदाय बार बार आने वाला हो तो उस आवर्तांक समुदाय के पहिले और अन्त के अंक के ऊपर केवल बिन्दु रखते हैं। जैसे,

·३३३३ इत्यादि इस दशमलवभिन्न को $\cdot\dot{३}$ ऐसा लिखते हैं।
·४५४५४५ ,, ,, ,, $\cdot\dot{४}\dot{५}$,, ,,
·३७४४४४ ,, ,, ,, $\cdot३७\dot{४}$,, ,,
·५२४३२४३ ,, ,, ,, $\cdot५\dot{२}४\dot{३}$,, ,,

(१५१) **शुद्ध आवर्त दशमलव को साधारण भिन्न का रूप देने का प्रकार**—आवर्त संख्या को अंशस्थान में लिखकर जितने आवर्तांक होंगे उतने ९ छेदस्थान में लिखने से जो भिन्नसंख्या बनेगी वह यदि संक्षिप्तरूप में न होगी तो उसको संक्षिप्त रूप देना चाहिये। यही शुद्ध आवर्तदशमलव का भिन्न संख्या में परिवर्तित रूप होगा।

उदाहरण, $\cdot\dot{५}$; $\cdot\dot{५}\dot{४}$; $\cdot\dot{७}१४२८\dot{५}$; इन शुद्ध आवर्त दशमलवों को सामान्य भिन्न का रूप देना हो तो, ऊपर लिखे प्रकारानुसार:—(१) $\cdot\dot{५} = \frac{५}{९}$। (२) $\cdot\dot{५}\dot{४} = \frac{५४}{९९} = \frac{६}{११}$। (३) $\cdot\dot{७}१४२८\dot{५} = \frac{७१४२८५}{९९९९९९} = \frac{\cancel{९}\times७९३६५}{\cancel{९}\times११११११} = \frac{७९३६५}{११११११} = \frac{५\times\cancel{१५८७३}}{७\times\cancel{१५८७३}} = \frac{५}{७}$ ऐसे रूप होते हैं। **क्योंकि**, (१) $\cdot\dot{५}$ इसके लिये 'अ' यह अव्यक्त पद मान लिया जाय तो अ = ·५५५५ इत्यादि। अतः १० × अ = ·५५५५ इ० × १० = ५·५५५५ इ०, लेकिन, जब १० × अ − १ × अ = ९ × अ होता है, तब १० × अ − १ × अ = ५·५५५५ इ० − ·५५५५ इ० = ९ अ = ५, अतः अ = $\frac{५}{९}$।

(२) ·५४̇ इसके लिये 'अ' को माने तब अ = ·५४५४५४ इ० (आवर्तांक दो हैं इसलिये १०० × अ लिया है)

∴ १०० × अ = ·५४५४५४ इ० × १०० लेकिन १०० × अ − १ × अ = ५४·५४५४ इ० − ·५४५४ इ० = ५४ = ९९ अ. ∴ अ = $\frac{५४}{९९}$ = $\frac{६}{११}$।

(३) ·७१४२८५̇ इसके लिये 'अ' माने तब अ = ·७१४२८५७१४ इ० (यहां आवर्तांक ६ हैं अतः १०००००० × अ लिया है) ∴ १०००००० अ − १ × अ = ७१४२८५·७१४२८५७१४२८५ इ० − ·७१४२८५७१४ इ० = ७१४२८५ = ९९९९९९ × अ. ∴ अ = $\frac{७१४२८५}{९९९९९९}$ = $\frac{५}{७}$।

(१५२) मिश्र आवर्त दशमलव को साधारण भिन्न के रूप लाने का प्रकार—अनावर्तांक और आवर्तांकों से बनी हुई सब संख्या अनावर्तांकों से बनी हुई संख्या घटाकर जो शेष संख्या बचेगी उसको अंशस्था लिखो। और आवर्तांक जितने होंगे उतने ९ लिखकर उनके आगे अनावर्तांक संख्याके तुल्य शून्य लिखने से जो संख्या बनेगी उसको छेदस्थान में लिखो। जो भिन्न बनेगी, वह यदि संक्षिप्तरूप में न हो तो उसको संक्षिप्तरूप देना चा यही मिश्र आवर्तदशमलव का भिन्नसंख्या में परिवर्तित रूप होगा।

उदाहरण ·२५̇; ·०२३५̇; ·२१४५६̇ इन मिश्र आवर्त दशमलवों को सा भिन्न में परिवर्तित करना है। ऊपर लिखे प्रकारानुसार:—(१) ·२५̇ = $\frac{२५-२}{९०}$ = $\frac{२३}{९०}$ (२) ·०२३५̇ = $\frac{२३५-२३}{९०००}$ = $\frac{२१२}{९०००}$ = $\frac{४\times५३}{४\times२२५०}$ = $\frac{५३}{२२५०}$ (३) ·२१४५६̇ = $\frac{२१४५६-२१}{९९९००}$ = $\frac{२१४३५}{९९९००}$ = $\frac{५५\times४१९}{७५\times१३३२}$ = $\frac{४१९}{१३३२}$ क्योंकि, (१) इसके लिये 'अ' यह अव्यक्तपद माना जाय तो अ = २·५५५५ इ० (यहां अ अङ्क १ और आवर्त अङ्क १ है, अतः इनके योग तुल्य १ पर शून्य रखने से यह प्रथम गुणक है, और अनावर्त अङ्क १ होने से १ पर एक शून्य रखने से यह द्वितीय गुणक है) ∴ १०० × अ − १० × अ = २५·५५५५इ० − २·५५ इ० = ९० × अ = २५ − २ = २३. ∴ अ = $\frac{२३}{९०}$।

(२) ·०२३५̇ इसके लिये 'अ' को माने तो अ = ·०२३५५५५ इ० (अनावर्तांक २ और आवर्ताङ्क १ इनका योग ४ है, अतः १०००० यह गुणक और अनावर्ताङ्क २ होने से १००० यह द्वितीय गुणक है) ∴ १०००० अ − १००० × अ = २३५·५५५ इ० − २३·५५५ इ०=९००० × अ = २३५ − २३ = २१२. ∴ अ = $\frac{२१२}{९०००}$ = $\frac{५३}{२२५०}$।

(३) ·३१४̇५६̇ इसके लिये 'अ' माने तो अ = ·३१४५६४५६ इ० (यहां अनावर्ताङ्क २ और आवर्ताङ्क ३ इनका योग ५ है, अतः १००००० यह प्रथम गुणक और अनावर्ताङ्क २ होने से १०० यह द्वितीय गुणक है) ∴ १००००० × अ − १०० × अ = ३१४५६·४५६४५६ इ० − ३१·४५६४५६ इ० = ९९९०० × अ = ३१४५६ − ३१ = ३१४२५ ∴ अ = $\frac{३१४२५}{९९९००} = \frac{४१९}{१३३२}$ ।

नोट—शुद्ध वा मिश्र आवर्त दशमलव की बांई ओर अभिन्न संख्या होगी तो उसको अलग रखकर केवल उसके भिन्न भाग को साधारण भिन्न का रूप (१५१) वा (१५२) क्रमानुसार दो । तब उसकी बाईं ओर अलग रखी हुई अभिन्न संख्या को लिखने से उसका मिश्र भिन्न में रूपान्तर होगा । किन्तु जब आवर्त दशांश को किसी संख्या से गुणना वा भाग देना होता है तब मिश्र भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित करना पड़ता है, जिसमें गौरव होता है । अतः उस आवर्त दशमलव को विषम भिन्न का रूप देने में ही लाघव होता है । यह नीचे के उदाहरण से स्पष्ट होगा ।

उदाहरण, २४·५̇७̇ इसको मिश्र और विषम भिन्न में परिवर्तित करो ।

यहां, २४ इस अभिन्नभाग को अलग रखा, और ·५̇७̇ = $\frac{५७}{९९} = \frac{१९}{३३}$ इस साधारण भिन्न की बाईं ओर २४ इस अभिन्न भाग को रखने २४$\frac{१९}{३३}$ यह अभीष्ट मिश्र भिन्न का रूप हुआ ।

यदि उक्त संख्या को विषम भिन्न में परिवर्तित करना हो तो उक्त अभिन्न भाग अनावर्ताङ्क सम्बन्ध का है, ऐसा समझ कर उस आवर्त दशांश को (१५२) प्र० के अनुसार साधारण भिन्न का रूप दिया । तब २४·५̇७̇ = $\frac{२४५७ - २४}{९९}$ = $\frac{२४२३}{९९} = \frac{११४१}{३३}$ यह अभीष्ट विषम भिन्न का रूप हुआ । ध्यान रहे कि, अभिन्न भाग को अनावर्ताङ्क सम्बन्धी समझने पर भी उसके लिये ९ छेद पर शून्य नहीं रखे जाते हैं ।

उदाहरणमाला (३२)

नीचे लिखी भिन्न संख्याओं को साधारण भिन्न का रूप दो ।

(१) $\frac{२}{३}$; $\frac{५}{३७}$; $\frac{१}{९९}$; $\frac{११}{२१}$; ८$\frac{२५}{१११}$ (२) $\frac{३}{४१}$; $\frac{३५७१}{४५००}$; $\frac{१७}{१३७५}$; २४$\frac{२४}{१७५}$; ७$\frac{}{७८}$ (३) २४$\frac{२}{४५}$; ४$\frac{५}{७२}$; ३$\frac{२६}{२२५}$; २५७$\frac{२}{१११}$ ।

निम्नलिखित आवर्त दशांशों को भिन्न संख्या में परिवर्तित करो ।

(४) ·९̇; ·०५̇; ·३̇२९̇; ·३̇४५̇; ·७२६̇ (५) ७·०̇१३̇; ·००२̇४̇; ·२६̇ ३·०̇२४̇; ·०१५̇६̇ (६) ७५·४̇५२̇; २३४·२५६̇७̇; २·५२३५̇७२४̇; ·५८ ·०१२३̇६̇ (७) ·५२४३५̇६७८̇; २·७८̇५७१४२̇; ८·०२०८३̇; ३·६४̇२८५७̇ ·३८२१̇४२८५७̇ ।

निम्नलिखित आवर्त दशमलवों को विषम भिन्न के रूप दो ।

(८) ७५·४̇५२̇; ८५३·५̇९३̇; ४६·३̇१२̇ (९) २·३४̇५̇; १२३·४५̇६७८̇ ८२३५·७२३̇६८७̇ (१०) ५६७·२५७३̇४५̇; २३४·२५६̇७̇; २२३·२३४̇४५̇ ।

आवर्तदशमलवों का योग और अन्तर

(१५३) जब आवर्त दशमलवों के मान साधारण भिन्न में जाने जा सक हैं तब उन भिन्न संख्याओं के द्वारा इनका योग और अन्तर हम जान सकते हैं।

उदाहरण (१) १·७̇५̇, ·४̇८१̇ और ·३̇४१४६̇ इन आवर्तों का योग क्या है

यहां, १·७̇५̇ = $१\frac{२५}{३३}$, ·४̇८१̇ = $\frac{१३}{२७}$ और ·३̇४१४६̇ = $\frac{१४}{४१}$

∴ योग = $१\frac{२५}{३३} + \frac{१३}{२७} + \frac{१४}{४१} = २\frac{७०६९}{१२१७७}$ = २·५८०५२ ।

उदाहरण (२) २·५४̇ और १·०७२̇५̇ इनका अन्तर करो ।

यहां, २·५४̇ = $२\frac{४९}{९०}$ और १·०७२̇५̇ = $१\frac{७१८}{९९००}$

∴ अन्तर = $२\frac{४९}{९०} - १\frac{७१८}{९९००} = २\frac{११६८}{२४७५}$ = २·४७१̇९̇ ।

किन्तु, इस प्रकार योग वा अन्तर करने में बहुत गौरव होता है। अतः जि आवर्तदशमलवों का योग वा अन्तर करना होगा उनके योग फल वा अन्तर फ में जितने दशमलव स्थान अभीष्ट होंगे उनसे दो अधिक स्थान उन आवर्तदश मलवों में आवर्तांकों के अनुक्रम से रख कर उनका योग वा अन्तर करने में अधि लाघव होता है और फल भी उनके वास्तव मान के बहुत निकट होते हैं ।

उदाहरण (१) १·७̇५̇, ·४̇८१̇ और ·३̇४१४६̇ इनका योग ऐसा करो जिस योगफल में ५ दशमलवस्थान होंगे ।

यहां अभीष्ट स्थान ५ हैं अतः प्रत्येक संख्या में ७ दशमलव स्थान रख क योग के लिये न्यास,

१·७५७५७	५८
·४८१४८	१५
·३४१४६	३४
२·५८०५२	०७

यहां प्रत्येक संख्या के आवर्तांकों के अनुक्रमानुसा उत्तर में अपेक्षित स्थानों से दो अधिक स्थान बढ़ा क योग किया है और अन्तिम दो स्थानों को छेककर उत्त निकाला है, जो पहिले उत्तर के समान है ।

उदाहरण (२) ३·५४̇ और १·०७२̇५̇ इनका अन्तर ऐसा करो जिससे अन्तर फल में दशमलव स्थान ६ होंगे।

यहां अभीष्ट स्थान ६ हैं अतः प्रत्येक संख्या में ८ दशमलव स्थान रख कर अन्तर के लिये न्यास,

३·५४४४४४	४४
१·०७२५२५	२५
२·४७१९१९	१९

यहां भी पहिले उत्तर के तुल्य ही उत्तर आया है।

नोट—किन्तु प्रश्न में यदि योगफल में वा अन्तर में इष्ट दशमलवस्थान न पूंछे जांय, तो योज्य संख्याओं में से प्रत्येक संख्या के आवर्तस्थान की संख्या लिख कर उन सब का जो लघुतमसमापवर्त्य होगा, उसमें उन संख्याओं में सर्वाधिक जो अनावर्त स्थान संख्या होगी, उसको जोड़ दो, और योगफल के तुल्य दशमलव स्थान प्रत्येक संख्या में पूर्वोक्त प्रकार से रखो। इस प्रकार उन सब संख्याओं को सजातीय बना कर तब उनका योग वा अन्तर करो। और योगफल में दशमलव बिन्दु की दाईं ओर सर्वाधिक अनावर्त स्थानों के अंकों के इतने अंकों को छोड़ कर शेष अंकों पर आवर्त सूचक बिन्दु रखो। यदि बाईं ओर की आवर्तांकों की पहिली खड़ी पङ्क्ति के योग वा अन्तर में कोई हाथ लगा अंक हो तो उस अंक को योगफल में जोड़ना और अन्तर में घटाना चाहिये।

उदाहरण (३) २·४̇, १·२५̇७̇, ३·४̇१८̇ और ७·६ इनका योग करो।

न्यास,
२·४̇४४४४४४̇
१·२५̇७५७५७̇
३·४̇१८४१८४̇
७·६००००००
१४·७२०४३८५
+ १
योगफल १४·७२̇०४३८६̇

यहां पहिली संख्या में एक, दूसरी में दो और तीसरी में तीन आवर्तस्थान हैं, अतः १, २, ३, इनका लघुतम ६ इसमें सर्वाधिक अनावर्त स्थान संख्या १ को जोड़ने से ७ होता है, अतः प्रत्येक संख्या में ७ दशमलव स्थान रख कर योग किया है, चौथी संख्या में आवर्तस्थान न होने से शून्य से स्थान पूर्ति की है। और यहां योगफल में सर्वाधिक अनावर्तस्थान का एक अंक ७ को छोड़ कर शेष अंकों को आवर्त सूचक बिन्दुओं से चिह्नित किया है। इसी तरह अन्तर भी करना चाहिये। यहां बाईं ओर की प्रथम आवर्तांकों की खड़ी पङ्क्ति ४, ५, १, ० और इसकी दाईं ओर की पहिली पङ्क्ति के हाथ लगे २ इन सब का योग १२ में हाथ लगा १ है, अतः योगफल में १ को जोड़ा है।

आवर्तदशमलवों का गुणन और भागहार

(१५४) गुण्य और गुणक अथवा भाज्य और भाजक इनको पहिले भिन्न संख्या का रूप देकर भिन्नगुणन और भाग के नियम से उनका गुणन और भाग करो। गुणनफल और लब्धि को दशमलव के स्वरूप में लिखो।

उदाहरण (१) ७·१२̇३̇ इसको ५·०१७̇ इससे गुण दो।

यहां, ७·१२̇३̇ = $\frac{३५२६}{४९५}$ और ५·०१७̇ = $\frac{११२९}{२२५}$ ।

∴ गुणनफल = $\frac{३५२६}{४९५} \times \frac{११२९}{२२५} = \frac{३९८०२५४}{१११३७५}$ = ३५·७४२७९६इ०

उदाहरण (२) १५·७३६̇ इसमें ५·४५̇७६̇ इसका भाग दो।

यहां, १५·७३६̇ = $\frac{४७२१}{३००}$ और ५·४५̇७६̇ = $\frac{३०२९}{५५५}$ ।

∴ लब्धि = $\frac{४७२१}{३००} \div \frac{३०२९}{५५५} = \frac{४७२१}{३००} \times \frac{५५५}{३०२९} = \frac{१७४६७७}{६०५८०}$ = २·८८३४१ इ०।

अथवा, गुणनफल में जितने दशमलव स्थान अभीष्ट होंगे उनसे दो अधिक स्थान गुण्य और गुणक में आवर्तांकानुक्रम से रख कर उनका गुणनफल (१४४) प्रक्रम में लिखे हुए संक्षिप्त गुणनविधि से करो। इससे क्रिया में लाघव तथा फल भी वास्तवफल के अतिनिकट होगा।

उदाहरण (३) ७·१२३̇ और ५·०१७̇ इनका गुणन ऐसा करो कि गुणनफल में दशमलवस्थान ५ होंगे।

यहां, अभीष्टस्थान ५ हैं अतः ७ अभीष्ट स्थान मानकर (१४४) प्रक्रमानुसार गुणन करने के लिये न्यास,

```
 ७·१२३२३२३२
 ७७ ७७७७१०५
 ----------
 ३५ ६१६१६१६
     ७१२३२३
     ४९८६२६
      ४९८६२
       ४९८६
        ४९८
         ५०
         .५
 ----------
 ३५·७४२७९६६
```

इसलिये गुणनफल = ३५·७४२७९ यह (१५४) प्रक्रम से सिद्ध किये हुए गुणनफल के तुल्य है। अथवा यहां (१२६) प्रक्रम के नोट के अनुसार ३५·७४२८ यह गुणनफल भी निकटतम होगा।

ध्यान में रहे कि, गुणक के अभिन्न भाग में जितने अभिन्नस्थान होंगे उतने स्थान गुण्य में और गुण्य के अभिन्न भाग में जितने अभिन्न स्थान होंगे उतने स्थान गुणक में और बढ़ाने चाहिये। यहां गुण्य और गुणक में एक अभिन्न स्थान होने से गुण्य का एक अंक दाहिने

ओर और नीचे उलटे लिखे हुए गुण का एक अंक बाईं ओर बढ़ा रहेगा, जैसा न्यास में दिखलाया गया है।

उदाहरण (४) १५·७३६̇ इसमें ५·४५̇७६̇ इसका ऐसा भाग दो जिससे लब्धि में दशमलवस्थान ४ होंगे। यहां अभीष्ट स्थान ४ हैं अतः ६ अभीष्ट स्थान मानकर (१४५) अक्रमानुसार लब्धि के लिये न्यास,

भाजक भाज्य लब्धि

५·४५७६५७६)१५·७३६६६६(२·८८३४१०
४८२१३५१
४५५२२५ यहां भी लब्धि पूर्वलब्धि के ही तुल्य है।
१८६१३
२२४०
५७
२

उदाहरणमाला (३२)

(१) ३·२̇१९̇, २·१२३̇, १·३̇०७̇ और ·५०२̇४̇ इनका योग ऐसा करो जिससे योगफल में दशांशस्थान ४ होंगे।

(२) ५४·२१̇७̇, ३७५·४२̇, ·०̇३२७̇ और १·१̇४९̇ इनका योग ऐसा करो जिससे योग में दशांशस्थान ६ होंगे।

(३) ४२·१७̇२̇ और ३४·८७̇ इनका, ९·०̇३९̇ और ५·४२̇६̇ इनका और ८·६८̇ और ८·७१४̇३̇ इनका अन्तर ६ दशांशस्थान तक करो।

(४) १३·२̇ इसको ७·०३̇ इससे ऐसा गुण दो जिससे गुणनफल में दशांशस्थान ६ होंगे।

(५) ·०३६४ इसको ·००५̇८४̇ इससे ऐसा गुण दो जिससे गुणनफल में दशांशस्थान ५ होंगे।

(६) ·६७̇९̇ इसका और ३६५ इसका गुणनफल ६ दशांशस्थान तक बताओ।

(७) २३५·२४̇ इसमें ८ का भाग ऐसा दो जिससे लब्धि में दशांशस्थान ५ होंगे।

(८) ९·१३७४̇२१̇ इसमें ·१५̇ इसका भाग दो और लब्धि में दशांशस्थान ६ लाओ।

(९) ३०.७९̇३̇ इसमें ८.८५̇४̇ इसका लब्धि में ७ दशांशस्थान तक भाग दो।

निम्नलिखित उदाहरणों को सरल करो और ६ दशमलव स्थानों तक शुद्ध उत्तर लिखो।

(१०) ४.२५̇७̇ + ३.३̇५२̇ + ४.५९̇३२̇ + ४२० + ८.०५̇९̇ ।

(११) ७.५२̇५̇ − ३.२५̇७̇; ८ − ३.५७̇९̇ और ८.०२५̇ − ५.३̇५̇ ।

(१२) २.३̇ × ५.६̇; .७५७̇५̇ × .३६६̇; और ७.५२̇ × ४८.३̇ ।

(१३) .४०६̇ × ६२; ८३५ × .३̇६̇ और ३.५̇ × .२०४३̇ ।

(१४) १९५.०२̇ ÷ ४; .३७५̇९२̇ ÷ .०५̇ और ५४ ÷ .१७̇ ।

(१५) ४११.२५̇१९̇ ÷ ५८.७६̇४५̇ और ९.५००̇९४̇ ÷ २.६१२७̇५८̇ ।

(१६) (३.२५̇६̇ + २.३४२̇) ÷ (९.२५२̇४̇ + ७.५२२̇९̇) ।

निम्न लिखित उदाहरणों को (१५२) प्रक्रमके नोट में कहे हुए प्रकार से सरल करो।

(१७) १.३७̇६̇ + .२३७̇०२̇ + .०००१ + .६̇ + .३̇७̇ ।

(१८) ४.०३̇४५̇ + ७.२३४ + ८१ + .०४̇५६७̇ + .०३̇ + .१̇२̇ ।

(१९) ३.७६̇ − .००७̇२̇; ४.१३̇०२̇ − १.०५̇२̇ ।

(२०) ९.४६८̇ − ३.१२३; २ − .७̇६̇ − .३̇२१̇; १ − .१̇०२̇ − .४६̇ ।

दशमलव भिन्न का रूपभेद

(१५५) जैसे भिन्नसंख्या के रूप भेद के दो प्रकार होते हैं, उसी तरह दशमलव भिन्न के रूप भेद के भी दो प्रकार होते हैं।

(१) प्रकार—विविध परिमाणों के दशमलव भिन्नों को उनसे छोटे परिमाणों का रूप देना। भिन्न संख्या के रूपभेद का पहला और दूसरा प्रकार (१३५) प्रक्रम में दिया गया है, उसी प्रकार से यहां भी क्रिया करनी पड़ती है। फरक केवल यही है कि वहां भिन्न संख्या के नियमानुसार गुणनादि क्रिया करनी होती है और यहाँ दशमलव भिन्न के नियमानुसार क्रिया करनी होती है अतः वह प्रकार यहां नहीं लिखे गये हैं।

उदाहरण (१) १ रुपये का .१५ इसको आने का रूप दो।

यहाँ, १ रुपये का .१५ = .१५ रु० = (.१५ × १६) आने = २.४ आना

उदाहरण (२) ५ रुपये का .३५ इसका अभिन्नसंख्या में मूल्य बताओ।

यहाँ, ५ रु० × ·३५ = १·७५ रु० = (१ + ·७५) रु० = १ रु० + (·७५ × १६) आ० = १ रु० १२ आ० । क्योंकि, ५ रु० के ·३५ = ५ रु० के $\frac{३५}{१००}$ = ५ रु० के $\frac{७}{२०}$ = $\frac{७}{४}$ रु० = १$\frac{३}{४}$ रु० = १ रु० १२ आ० ।

उदाहरण (३) १ रुपये के ·२५८३̇ इसका अभिन्न संख्या में मान बताओ।

यहाँ, ·२५८३̇ रु० = $\frac{२५८३-२५८}{९०००}$ रु० = $\frac{३१}{१२०}$ रु० = ($\frac{३१}{१२०}$ × १६) आ० = $\frac{६२}{१५}$ आ० = ४$\frac{२}{१५}$ आ० = ४ आ० १$\frac{३}{५}$ पा० ।

उदाहरणमाला (३४)

(१) १ पौण्ड का ·९६ इसको शिलिङ्ग का, और २·५ शि० का ·६ इसको पेन्स का रूप दो।

(२) २·३ रु० का ·०२४ इसको पाई का रूप दो।

(३) $\frac{३}{३}$ गिनी और ·६ शि० इनका अभिन्न संख्या में मान निकालो।

(४) $\frac{३}{२}$ गिनी का ·५ का ३·४ का (·२५ ÷ ·०४) इसका अभिन्न संख्या में मान बताओ।

नीचे दिये हुए परिमाणों का छोटे परिमाणों में अभिन्न संख्या में मान निकालो।

(५) १ रुपये का ·०९५; १ गिनी का ·०८२५ और १॥) रु० का ·७२५।

(६) १ पौ० का ·४५२५; १ मील का ·०४५; १ दिन का २·५३८४३७५।

(७) २ रु० १३ आ० ४ पा० इनका ·३७५; ३ पौ० ४ शि० ६ पे० इनका ·७२७५।

(८) १०० पौ० का ·२४५; ५ मन २८ से० इनका ·०१२५।

(९) १ टन १० हंडर० इनका ·२०७५।

(१०) ३ रु० ६ आ० का ·५७२̇; ४ दिन ३ घं० इनका ४·९̇०̇; १०० गिनी का ·०६३̇।

इनका मान निकालो।

(११) ·६८१२५ पौ० + १३ शि० ४ पे० का ·३७५ + ३ पौ० २ शि० ६ पे० का ·६०५।

(१२) ६ शि० ८ पे० का ३$\frac{७}{८}$ − ·४०९७२̇ गिनी + ३० पौ० का २·७५।

(१३) ३६५$\frac{१}{४}$ दिन का २·८३̇ + ५·७५ सप्ताह − ५$\frac{५}{६}$ घण्टे का $\frac{३}{४}$।

(१४) एक मनुष्य की वार्षिक आमदनी २६००) रु० है, यदि उस आमदनी का ·६ रु० सालाना खर्च में और ·४२५ रु० टैक्स देने में वह खर्च करता है, तो उसके पास कितना बचेगा ?

(१५) एक गाड़ी ७५ मील दूर जाने में दो बार विश्राम करती है, पहली बार उस दूरी के ·४ पर, और दूसरी बार ·३२ पर विश्राम करती है, तो बताओ उस गाड़ी को और कितनी दूर जाना है ?

(२) प्रकार—विविध परिमाणों के दशमलव भिन्नों को उनसे छोटे परिमाणों का रूप देना।

उदाहरण (१) ८ शि० ६ पे० को १ पौण्ड के दशमलव भिन्न का रूप दो।

यहां, ८ शि० ६ पे० = $८\frac{१}{२}$ शि०, और १ पौण्ड=२०,

∴ $८\frac{१}{२} = (८\frac{१}{२} \div २०)$ पौ० = $\frac{१७}{४०}$ पौ० = ·४२५ पौ०। अतः ८ शि० ६ पे० यह १ पौण्ड की ·४२५ यह दशमलव भिन्न है।

उदाहरण (२) १ रु० का $\frac{५}{६}$ यह १ रु० ८ आ० की कौन सी दशमलव भिन्न है ?

यहाँ, १ रु० का $\frac{५}{६} = \frac{५}{६}$ रु० = ($\frac{५}{६}$ × १६ × १२) पा० = १६० पा० १ रु० ८ आ० = २४ आ० = २८८ पा०;

अतः अभीष्ट दशमलव भिन्न = $\frac{१६०}{२८८} = \frac{५}{९}$ = ·$\dot{५}$।

उदाहरण (३) १ रु० का $\frac{५}{९}$ + २ रु० १० आ० का $\frac{५}{१२}$, इसको ५ रुपये के दशमलव भिन्न में प्रकट करो।

यहां, १ रु० का $\frac{५}{९} = \frac{५}{९}$ रु० = ($\frac{५}{९}$ × १६ × १२) पा० = $१०६\frac{२}{३}$ पा०; २ रु० १० आ० का $\frac{५}{१२}$ = ($\frac{५}{१२}$ × ४२ × १२) पा० = २१० पा०;

∴ १ रु० का $\frac{५}{९}$ + २ रु० १० आ० का $\frac{५}{१२}$ = ($१०६\frac{२}{३}$ + २१०) पा० = $३१६\frac{२}{३}$ पा०; और ५ रु० = (५ × १६ × १२) पा० = ९६० पा०;

∴ अभीष्ट दशमलव भिन्न = $३१६\frac{२}{३} \div ९६० = \frac{९५}{२८८}$ = ·३२९८$\dot{६}$१।

उदाहरणमाला (३५)

(१) ५ आना ३ पा० और १२ आना ९ पा० को १ रुपये की दशमलव भिन्न का रूप दो।

(२) ७ आना ६ पा०, और ॥)।, इनमें से हर एक २ रुपये की कौनसी दशमलव भिन्न है ?

(३) ५।≋)।१ को १≈) की दशमलव भिन्न में, और ७॥~)।१ इसको १०।~)।१ की दशमलव भिन्न में लिखो ।

(४) १ पौ० २ शि० ८ पे० यह ५ पौ० १८ शि० ४ पे० की कौनसी दशमलव भिन्न है ?

(५) १४ घण्टा १५ मि० यह २$\frac{१}{२}$ दिन के किस दशमलव भिन्न के तुल्य है ?

(६) २ मन २५ से० इसको ३ मन १५ से० की दशमलव भिन्न में परिवर्तित करो ।

(७) ७ शि० ८·१९४२ पे० यह १० शि० ६ पे० की कौनसी दशमलव भिन्न है ?

(८) १॥ मन का $\frac{२}{३}$ यह ५ मन का ·२५६ को कौनसी दशमलव भिन्न है ?

(९) ४० गज का $\frac{३}{७}$ का $\frac{१}{१०}$, इसको २ मील का $\frac{१}{८}$ की दशमलव भिन्न में लिखो ।

(१०) $\frac{३}{८}$ दिन + $\frac{२}{३}$ घण्टा + ६ घण्टे का $\frac{४}{८}$ इसको सप्ताह की दशमलव भिन्न में परिवर्तित करो ।

(११) १० शिलिङ्ग का $\frac{३}{१६}$ का ·३७५ + २ शि० ६ पे० का $\frac{४}{८}$ − $\frac{३}{४}$ शि०, इनको १ पौण्ड की दशमलव भिन्न का रूप दो ।

(१२) १३ शि० ४ पे० का $\frac{३}{८}$ + ८ शि० ६ पे० का $\frac{२}{६}$ + ९ शि० ९ पे० का ·१, यह १६ रुपये की कौनसी दशमलव भिन्न है ? (१ रु० = १$\frac{१५}{१६}$ शि०)

वर्ग

(१५६) **प्रकार १ ला**—समान दो राशियों के घातको वर्ग कहते हैं। अथवा जिस राशि का वर्ग करना हो उससे १ को दो बार गुणने से गुणनफल उस राशि का वर्ग होगा । जैसे, $(२५)^२$ = १ × २५ × २५ = ६२५। किसी भिन्न संख्या का वर्ग करना हो, तो अंश का वर्ग अंश स्थान में और छेद का वर्ग छेद स्थान में रखो । जैसे, $(\frac{७}{८})^२ = \frac{४९}{६४}$ ।

प्रकार २ रा–जिस राशि का वर्ग करना होगा उसके ऐसे दो खण्ड
जिनका योग उस राशि के तुल्य होगा। तब उन खण्डों के वर्गयोग में उन
का द्विगुण घात जोडने से योग फल उस राशि का वर्ग होगा। जैसे, २५ का
करना है। तब २५ के (२०+५) ऐसे दो खण्ड किये। अब (२०)^2 =
और ५^2 = २५ इन दोनों का योग ४२५ इसमें दोनों खण्डों का द्विगुण
२० × ५ × २ = २०० जोडने से ६२५ यह इष्ट राशि का वर्ग हुआ।

इसी प्रकार इष्ट राशि के ऐसे दो खण्ड करो जिनका अन्तर इष्ट राशि
तुल्य होगा। तब उन खण्डों के वर्गयोग में उन खण्डों का द्विगुण घात घटा
से अन्तर उस राशि का वर्ग होगा।

जैसे, २५ का वर्ग करना है। तब २५ के (३० – ५) ऐसे दो खण्ड कि
अब (३०)^2 = ९०० और ५^2 = २५ इनका योग ९२५ इसमें दोनों खण्डों
द्विगुण घात ३० × ५ × २ = ३०० को घटाने से ६२५ यह इष्ट राशि
वर्ग हुआ।

प्रकार ३ रा–जिस राशि का वर्ग करना होगा उसमें कोई इष्ट संख्या
जोड और घटा दो। तब उस योग और अन्तर के गुणनफल में इष्ट संख्या
वर्ग जोड देने से योग फल उस राशि का वर्ग होगा।

जैसे, २५ का वर्ग करना है, तब ५ को इष्ट संख्या माना, अब ५ को २
जोडने से ३० और घटा देने से २० होता है, इनका गुणन फल ३० × २० = ६
में ५ का वर्ग २५ जोडने से ६२५ यह इष्ट राशि का वर्ग हुआ।

प्रकार ४ था–जिस संख्या में एक से अधिक अङ्क होंगे उसका लाघव
वर्ग करने के लिये उस संख्या को लिखकर उसके नीचे एक रेखा करो। फिर
संख्या के एक स्थान के अङ्क से उसी अङ्क को गुण देने पर जो गुणन फल हो
उसके एक स्थान के अङ्क को उस रेखा के नीचे एक स्थान में लिखो और द
स्थान के अंक को हाथ लगा अंक समझो। फिर उसी एक स्थान के दूने अंक
उस संख्या के दश, शत आदि स्थानों के अङ्कों को गुण कर गुणनफल में
हाथ लगे अंक को जोड दो और योग फल को रेखा के नीचे जो अंक लिखा
उसकी बाईं ओर लिख दो। इस तरह रेखा के नीचे जो पंक्ति बनेगी उस
पहिली पंक्ति कहो। फिर उस एक स्थान के अंक को छोड दो और शेष सं

को मूल संख्या मानकर ऊपर के विधि से दूसरी अंकों की पंक्ति उत्पन्न करो। इस दूसरी पंक्ति को पहिली पंक्ति के नीचे दो स्थान बाईं ओर हटाकर लिखो अर्थात् ऐसे क्रम से लिखो कि पहिली पंक्ति के शत आदि स्थानों के अंकों के नीचे दूसरी पंक्ति के एक आदि स्थानों के अंक आवेंगे। फिर इसी प्रकार तीसरी, चौथी आदि पंक्तियों को उत्पन्न कर प्रत्येक पंक्ति को अपनी पूर्व पंक्ति के नीचे दो दो स्थान बाईं ओर हटा कर लिखते जाओ। इस प्रकार अन्त तक करने पर यथास्थित सब पंक्तियों का योग करो। यही योगफल उस संख्या का वर्ग होगा।

यदि मूल संख्या में कोई शून्य होगा तो जिस तरह गुणन में एक शून्य के लिये एक स्थान, दो शून्यों के लिये दो स्थान छोड़ कर नीचे का खण्डगुणनफल लिखते हो उसी तरह यहां एक शून्य के लिये दो स्थान दो शून्यों के लिये चार स्थान छोड़ कर नीचे की पंक्ति लिखो।

उदाहरण (१) ८४९०३२५१ इसका वर्ग करो।

न्यास,	८४९०३२५१	
	१६९८०६५०१	पहली पंक्ति
	८४९०३२२५..	दूसरी ,,
	३३९६१२४..	तीसरी ,,
	५०९४०९..	चौथी ,,
	१५२०१....	पांचवी ,,
	६५६..	छठी ,,
	६४..	सातवी ,,
अभीष्ट संख्या का वर्ग	७२०८५६२०३०३६९००१	

यहां मूल संख्या का एक स्थान का अङ्क १ इसको १ से गुण कर गुणन फल १ को रेखा के नीचे एक स्थान में रखा, और १ का दूना २ से ८४९०३२५ इस शेष संख्या को गुणकर गुणन फल को १ की बांई ओर रखा, यह पहली पंक्ति हुई। तब १ को छोड़ने से मूल संख्या के एक स्थान के ५ इस अङ्क को ५ से गुणकर गुणनफल २५ में ५ को पहली पंक्ति के नीचे दो स्थान छोड़ कर दूसरी पंक्ति में लिखो, यहां हाथ लगे २ हैं, फिर ५ के दूने १० से इस दूसरी मूल संख्या के ८४९०३२ इन शेष अङ्कों को गुणकर गुणनफल में हाथ लगे २ को जोड़ने से जो योगफल हुआ उसको ५ की बांई ओर रख कर दूसरी पंक्ति बनाई गई है।

फिर ५ इसको छोड़कर पुनः ऊपर की क्रिया करने से तीसरी पंक्ति उत्पन्न की। इसी प्रकार न्यास में सब पंक्तियाँ उत्पन्न की गई हैं।

पहले मूल संख्या के आद्यांक से वर्ग करने का विधि लिखा गया है। अब संख्या के अन्त के अङ्क से वर्ग करने का प्रकार लिखा जाता है। मूल संख्या नीचे एक रेखा करो। तब उस संख्या की बांई ओर के अन्तिम अङ्क से उसी को गुण कर गुणन फल के एक स्थान के अङ्क को उसी के नीचे लिखकर हाथ अङ्क को उसकी बांई ओर लिखो। फिर उस अङ्क के दूने अङ्क से दांई ओर अङ्क को गुण कर गुणनफल के एक स्थान के अङ्क को उसी के नीचे लिखो। दशस्थान के अङ्क को उसकी बांई ओर पूर्व गुणन फल के एक स्थान के अ नीचे लिखो। इस तरह सब अङ्कों को गुण कर गुणन फलों में बांई ओर हुए हाथ लगे अङ्कों को पूर्व पूर्व के गुणन फलों के एक स्थान के अङ्कों में से जो योग होगा उसको पहली पंक्ति कहो और उसको रेखा के नीचे लि फिर बांई ओर के अन्तिम अङ्क को छोड़ कर शेष बची संख्या की बांई ओ अन्तिम अङ्क से उसी अङ्क को गुण दो और गुणन फल को पूर्ववत् लिखो। दूने उस अन्तिम अङ्क से शेष अङ्कों को गुणकर गुणन फलों के एक स्थान के को उन उन अङ्कों के नीचे रखो और दशस्थानों के अङ्कों को बांई ओर पू गुणन फल के एक स्थान के अङ्कों के नीचे रखते जाओ। तब सब अङ्कों का कर योगफल को दूसरी पंक्ति कहो। इसी तरह बांई ओर के एक एक अ छोड़ कर सब पंक्तियों को उत्पन्न करो। अब इस दूसरी पंक्ति को पहली पं नीचे इस तरह लिखो, जिससे पहली पंक्ति के एक स्थान के अङ्क की दाईं नीचे के दूसरी पंक्ति के एक स्थान का अङ्क रहेगा। इसी तरह प्रत्येक पं उसके ऊपर वाले पंक्ति के नीचे लिखो। तब सब पंक्तिओं के यथास्थित अ जो योग होगा वही मूल संख्या का वर्ग होगा।

नोट—जब अभीष्ट संख्या में कोई शून्य भी रहेगा तब एक शून्य के नीचे वाली पंक्ति को इस तरह लिखो जिससे ऊपर वाली पंक्ति के एक स्था अङ्क की दाईं ओर नीचे वाली पंक्ति के दाईं ओर के अन्तिम दो अङ्क रहेंगे। निरन्तर दो शून्य होंगे तो ऊपर की पंक्ति के एक स्थान के अङ्क की दाईं ओर वाली पंक्ति के दाईं ओर के अन्तिम तीन अङ्क रहेंगे। इस तरह आगे प्रत्येक के लिये नीचे वाली पंक्ति का एक एक अङ्क दाईं ओर बढाते जाओ।

उदाहरण (२) ८४९०३२५१ इसका अन्त्याङ्क विधि से वर्ग करो।

न्यास,		८४९०३२५१
	पहली पंक्ति	७१८४५२०१६
	दूसरी ,,	२३२२६००८
	तीसरी ,,	८१५८५१८
	चौथी ,,	१०५०६
	पांचवी ,,	६०४
	छठी ,,	२६०
	सातवीं ,,	१
अभीष्ट संख्या का वर्ग		७२०८५६२०३०३६९००१

यहां इष्ट संख्या की बाईं ओर का अन्तिम अङ्क ८ इसको इसीसे गुणन कर, तब इसके दूने १६ इस अङ्क से शेष अङ्कों को गुणकर और सब गुणन फलों के हाथ लगे अङ्कों का योग कर पहली पंक्ति किस तरह उत्पन्न की है, यह नीचे दिखलाया गया है:—

ं८४९०३२५१ = मूल संख्या,
६४४४०८२०६
 ६४××४३८१
 १
७१८४५२०१६ = पहली पंक्ति,

इसी तरह सब पंक्तियां उत्पन्न की गई हैं। यहां शून्य होने से चौथी पंक्ति को इस तरह लिखा है जिससे तीसरी पंक्ति के एक स्थान के ८ इस अङ्क की दाईं ओर चौथी पंक्ति के ० और ६ ये दो अङ्क आये हैं। और सब पंक्तिओं में प्रत्येक पंक्ति के एक स्थान के अङ्क की दाईं ओर उसके नीचे के पंक्ति का केवल एक अङ्क आया है।

(१५७) दशमलव संख्या का वर्ग करना हो तो उसको अभिन्न संख्या मान कर अभिन्न संख्या की तरह उसका वर्ग करो। अन्त में जो फल होगा उसमें मूल संख्या में जितने दशमलव स्थान होंगे उनके दूने दशमलव स्थान दाईं ओर से गिन कर रखो। जैसे, $(\cdot 001)^{2} = \cdot 000001$, यहां उक्त संख्या को अभिन्न संख्या मानने से १ हुआ, इस का वर्ग १ इसकी बांई ओर ५ शून्य रख कर ३ के दूने ६ स्थानों की पूर्ति की है।

आवर्त दशमलव का लाघव से वर्ग किस तरह करना चाहिये, इसके नीचे उदाहरण दिया गया है।

उदाहरण (३) ८·६७̇ इसका वर्ग ऐसा करो जिससे उसमें ४ दश स्थान होंगे।

यहां अभीष्टस्थान ४ हैं अतः ६ अभीष्ट स्थान मानकर (१४४) प्र नुसार गुणन के लिये न्यास,

८·६७७७७७७
७७ ७७७७६८
६९ ४२२२२२
५ २०६६६६
६०७४४४
६०७४४
६०७४
६०७
६०
६
७५·३०३७२३

यहां गुण्यगुणकों का न्यास (१५४) प्रक्र तीसरे उदाहरण के अनुसार किया है। इसकी प्र के लिये उद्दिष्ट मिश्र आवर्त दशमलव संख्या को संख्या का रूप देकर उसका वर्ग करो और इस को ४ अभीष्ट दशमलवस्थान तक दशमलवभि परिवर्तित करो, तो (१४४) प्रक्रमानुसार लाया यह फल इसके अति निकट होगा। अथवा (१ प्रक्रम की क्रिया में दो और दशमलव स्थान बढ़ा तो फल इसके तुल्य होगा।

उदाहरणमाला (३६)

निम्नलिखित संख्याओं का वर्ग करो।

(१) ६७; ४०९; ५२६; ६९४; ८३५। (२) ९०८; २०५८; ३५ ४९१७; ५८४६। (३) ७६९०; ७०१९; २९४५३; ५२७८२९; ४१८०३ (४) ५२१६५२४; ५८२३०३८; ७३१८२०६; ९८४३२७५; १३०४६८ (५) ७६३९८४१२; ८०६७३९१७; ९३७०२४०००; ५००२०८१ ३९०५२८१७२। (६) $\frac{७}{६३}$; $\frac{८}{९१}$; $\frac{३५}{११७}$; $\frac{४१}{६९१}$; $\frac{१०५}{२००७}$।

(७) किसी मनुष्य ने ४६७) रु० के कुछ फल मोल लिये। यदि १) में ४६७ फल उसने खरीदे तो कुल कितने फल उसने मोल लिये?

(८) किसी महाजन ने एक दिन अपने यहां ब्राह्मणों को बुलाकर उन धन दिया। उन ब्राह्मणों की संख्या ६२९ थी। यदि प्रति ब्राह्मण को उसने ६ रुपये दिये तो उस दिन उसने कितने रुपये दान किये?

(९) किसी राजा ने अपनी सेना को जब ३१६ पङ्क्तियों में खड़ा किया और हर पङ्क्ति में ३१६ सैनिक खड़े किये तब १४४ सैनिक शेष बचे। कहो उस सेना में कुल कितने सैनिक थे।

वर्गमूल

(१५८) जो राशि जिस दूसरे राशि का वर्ग कहा जाता है वह दूसरा राशि उस राशि का वर्गमूल कहा जाता है। जैसे, ४ का वर्ग १६ है अतः १६ का वर्ग मूल ४ होता है। कभी कभी वर्गमूल के लिये केवल **मूल** शब्द का भी प्रयोग किया जाता है। यहां १ से ९ तक के वर्गों को कण्ठस्थ करना अत्यावश्यक है।

(१५९) यहां यह जानना चाहिये कि सभी संख्याओं के मूल नहीं होते हैं। जैसे, १, ४, ९, १६ इत्यादि संख्याओं के मूल क्रमसे १, २, ३, ४ इत्यादि हैं। परन्तु २, ३, ५, ६ इत्यादि संख्याओं के ठीक ठीक मूल नहीं होते हैं। अतः जिनके ठीक ठीक मूल मिलते हैं वे वर्ग राशि और जिनके वर्गमूल ठीक ठीक नहीं मिलते वे अवर्ग राशि कहे जाते हैं। जैसे, २, ३, ५ इत्यादि अवर्ग राशि हैं। अवर्ग राशि से छोटा और उसके पास का जो वर्ग राशि होता है उसके मूल को उस अवर्गराशि का निरभ्र मूल कहते हैं। जैसे, १२ का निरभ्र मूल ३ है। भिन्न राशि का वर्गमूल जानना हो तो अंश का मूल अंशस्थान में और छेद का मूल छेदस्थान में रखो। जैसे, $\frac{१६}{८१} = \frac{४}{९}$।

(१६०) अब कोई संख्या चाहे वह १०००० से छोटी वा बड़ी होगी उसका वर्गमूल जानने की विधि लिखी जाती है:—जिस संख्या का वर्गमूल जानना है वह उद्दिष्ट संख्या वा अभीष्ट संख्या कही जाती है और इसका मूल अभीष्ट वर्ग-मूल कहा जाता है। अब उद्दिष्ट संख्या के विषम स्थानों के अंकों के ऊपर एक एक बिन्दु रखो। अर्थात् उस संख्या के एक स्थान के अंक के ऊपर बिन्दु रख कर फिर बाईं ओर एक एक अंक छोड़ कर दूसरे दूसरे अंक के ऊपर बिन्दु रखो। इस तरह बिन्दुओं से जो उद्दिष्ट संख्या के विभाग होंगे वे विषम कहे जाते हैं और वे बाईं ओर के अन्तिम विषम से दाहिनी ओर उत्तरोत्तर पहिला विषम, दूसरा विषम इत्यादि कहे जाते हैं।

अब पहिले विषम में जो सब से बड़ी वर्ग संख्या घट सकेगी उसका वर्गमूल

लो अर्थात् उस वर्ग का मूल वा निरग्रमूल लो, यह अभीष्टमूल की बाईं ओर पहला अंक होगा। अब जैसे भागहार में भाज्य की दाईं ओर लब्धि स्थान कल्पना की है उसी तरह यहां उद्दिष्ट संख्या की दाईं ओर मूल स्थान की कल्पना करके उसमें अभीष्ट मूल का वह अंक लिखो और उसके वर्ग को पहले विषम में घटा दो। तब जो शेष बचेगा उसकी दाईं ओर दूसरा विषम लिखने से जो संख्या बनेगी उसको प्रथम भाज्य कहो। अभीष्ट मूल के पहले अंक को दूना करके उसको इस प्रथम भाज्य की बाईं ओर अर्थात् भाजक स्थान में लिखो। इसको पहली पङ्क्ति कहो। तब देखो कि इस प्रथम पङ्क्ति का प्रथम भाज्य में भाग देने पर क्या लब्धि होती है? जो लब्धि होगी वही अभीष्ट मूल का दूसरा अंक होगा। इसको मूल के पहले अंक की दाईं ओर मूलस्थान में लिखो। और पहली पङ्क्ति की दाईं ओर भी इसी दूसरे अंक को लिखकर उसके नीचे पुनः इस अंक को लिखो। और उसके नीचे एक रेखा करो। अब मूल के दूसरे अंक से युक्त इस पहली पंक्ति के नीचे लिखे हुए अभीष्टमूल के दूसरे अंक से उस पहली पंक्ति को गुणकर गुणनफल को प्रथम भाज्य में घटा दो। यदि यह गुणनफल प्रथम भाज्य से बड़ा होगा तो ऊपर जिस अंक को मूल का दूसरा अंक कहा है उससे छोटे ऐसे अंक की कल्पना करो जिससे उसकी पंक्ति को गुण देने पर गुणनफल प्रथम भाज्य से छोटा होगा। तब वही कल्पना किया हुआ छोटा अंक अभीष्टमूल का दूसरा अंक होगा। इस नये दूसरे अंक को पहली पंक्ति की दाईं ओर लिखकर उसके नीचे पुनः इस अंक को लिखो। तब इस अंक से पहिली पङ्क्ति को गुण कर गुणनफल को प्रथम भाज्य में घटा दो। जो शेष बचेगा उसकी दाईं ओर तृतीय विषम रखने से जो संख्या बनेगी उसको द्वितीय भाज्य कहो। और पहली पङ्क्ति के नीचे लिखे हुए अंक को उस पङ्क्ति में जोड़ कर योगफल को रेखा के नीचे लिखो। और इसको दूसरी पङ्क्ति कहो। अब देखो कि इस दूसरी पङ्क्ति का द्वितीय भाज्य में भाग देने पर क्या लब्धि होती है? जो लब्ध होगा वह अभीष्टमूल का तीसरा अंक होगा। इसको मूल स्थान के पहले दो अंक की दाईं ओर लिखकर दूसरी पंक्ति की दाईं ओर भी इस तीसरे अंक को लिखो। और उसके नीचे पुनः इस तीसरे अंकको लिखकर उसके नीचे एक रेखा करो। तब ऊपर जो क्रिया की गई है उसी के अनुार आगे क्रिया करो। इस तरह बार बार करने पर अन्त में यदि कुछ शेष न बचेगा तो मूलस्थान में जो संख्या होगी वह उ

संख्या का वर्गमूल होगा। और यदि अन्त में कुछ शेष बचेगा तो जो वर्गमूल लब्ध हुआ वह उद्दिष्ट संख्या का निरग्रमूल होगा। जब भाज्य में पंक्ति का भाग न लगेगा तब मूल और पंक्ति इन दोनों की दाईं ओर शून्य लिखकर आगे क्रिया करनी चाहिये। यहां अन्तिम पंक्ति का आधा अभीष्ट वर्गमूल होता है।

उदाहरण (१) ९३५८६२७६ इसका वर्गमूल क्या होगा?

यहां उद्दिष्ट संख्या ९३५८६२७६ (९६७४ यह वर्गमूल है।

		८१	
पहली पंक्ति	१८६	१२५८	पहला भाज्य
	६	१११६	
दूसरी ,,	१९२७	१४२६२	द्वितीय ,,
	७	१३४८९	
तीसरी ,,	१९३४४	७७३७६	तृतीय ,,
	४	७७३७६	
चौथी ,,	१९३४८	....	

यहां पहला विषम ९३ इसमें ९ का वर्ग ८१ को घटा कर शेष १२ के ऊपर ५८ यह दूसरा विषम उतारा, तब १२५८ यह प्रथम भाज्य हुआ। अब ८१ का मूल ९ को मूलस्थान में रखा, फिर ९ का दूना १८ यह पहली पंक्ति हुई, इसका पहले भाज्य में भाग दिया तब लब्ध ६ को मूल स्थान में और पहली पंक्ति की दाईं ओर रखा फिर ६ को पुनः उसके नीचे रख कर ६ × १८६ = १११६ को पहले भाज्य में घटाया, तब शेष १४२ पर तृतीय विषय ६२ को उतारा, तब १४२६२ यह द्वितीय भाज्य हुआ, अब १८६ में ६ को जोड़कर १९२ यह दूसरी पंक्ति हुई, इसका द्वितीय भाज्य में भाग दिया तो लब्ध ७ को मूलस्थान में और दूसरी पंक्ति की दाईं ओर रख कर उसके नीचे पुनः ७ को रखा, फिर ७ × १९२७ = १३४८९ को द्वितीय भाज्य में घटा कर ७७३ इस शेष पर ७६ इस चौथे विषम को उतारा, तब ७७३७६ यह तृतीय भाज्य हुआ, अब १९२७ में ७ को जोड़कर १९३४ यह तीसरी पंक्ति हुई, इसका तृतीय भाज्य में भाग दिया तो लब्ध ४ को मूलस्थान में और तृतीय पंक्ति की दाईं ओर रख कर उसके नीचे पुनः ४ को रखा, फिर ४ × १९३४४ = ७७३७६ को तृतीय भाज्य में घटाया तो शेष शून्य हुआ, १९३४४ में ४ को जोड़ने से १९३४८ यह चौथी

पंक्ति हुई, यहां १९३४८ ÷ २ = ९६७४ होता है अतः यह वर्गमूल शुद्ध है। और उद्दिष्ट संख्या में जितने विषम होंगे उतने ही मूल में अंक रहेंगे। यहां उद्दिष्ट संख्या में ४ विषम हैं। अतः मूल में भी ४ ही अंक आये हैं।

(१६१) दशमलव संख्या का वर्गमूल निकालने का प्रकार-जिस दशमलव संख्या का वर्गमूल जानना हो उसमें दशमलव स्थानों की संख्या अवश्य सम होनी चाहिये। यदि वह संख्या विषम होगी तो उसकी दाईं ओर एक शून्य रख कर उसको सम बनाओ। फिर उस दशमलव संख्या को अभिन्न संख्या मानकर उसका मूल उक्त नियम से निकालो। तब उस दशमलव संख्या में जितने दशमलव स्थान होंगे उसके आधे दशमलव स्थान उस वर्ग मूल में दाईं ओर से गिनकर बनाओ। यही अभीष्ट वर्गमूल होगा।

उदाहरण (२) ·००००४४८९ इसका वर्गमूल क्या है ?

यहां वर्ग में दशमलव स्थानों की संख्या सम है। अब उक्त संख्या को अभिन्न संख्या मानकर वर्गमूल के लिये न्यास,

	४४८९ (६७	यहां वर्ग में दशमलव स्थान ८ हैं।
	३६	तब वर्गमूल में ४ दशमलव स्थान
१२७	८८९	होंगे। अतः ·००६७ यह अभीष्ट वर्ग
७	८८९	मूल है।
१३४	·····	

नोट—जब कि दशमलव के वर्ग में दशमलव स्थान सम होते हैं, तब यह स्पष्ट है कि उस दशमलव के अभिन्न भाग के एक स्थान के अंक के ऊपर बिन्दु अवश्य रहेगा। अब अभिन्न भाग के ऊपर जितने बिन्दु होंगे उतने वर्गमूल में अभिन्न स्थान होंगे और शेष दशमलव स्थान होंगे, यह जान कर वर्गमूल में दशमलव स्थान बनाओ।

(१६२) जहां उद्दिष्ट दशमलव संख्या अवर्ग होती है अर्थात् उसका वर्गमूल लेने पर कुछ शेष बचता है, ऐसे अवर्ग दशमलव संख्या का अभीष्ट दशमलव स्थान तक वर्गमूल लेना हो, तो अन्तिम शेष पर प्रत्येक स्थान के लिये दो दो शून्य रखकर वर्गमूल में दशमलव स्थानों की संख्या की पूर्ति करो।

उदाहरण (३) ४२·३१ इसका ४ दशमलव स्थान तक वर्गमूल क्या होगा ?

न्यास,

	४२·३१ (६·५०४६
	३६
१२५	६३१
५	६२५
१३००४	६००००
४	५२०१६
१३००८६	७९८४००
६	७८०५१६
१३००९२	१७८८४

यहां ६ इस प्रथम शेष पर दशमलव भाग का ३१ यह विषम लेने के बाद मूल में जो अंक लब्ध हुए हैं उनको दशमलव बिन्दु के बाद रखा गया है। और मूल में इष्ट दशमलव स्थान आने तक प्रत्येक शेष पर दो शून्य रखे गये हैं।

(१६३) किसी अवर्ग साधारण भिन्न संख्या का अभीष्ट दशमलव स्थान तक वर्गमूल लेना अपेक्षित हो, तो वह साधारण भिन्न यदि संक्षिप्त रूप में न हो तो उसको संक्षिप्तरूप देकर उसके अंश और छेद को ऐसे अंक से गुण दो जिससे छेद की संख्या पूरा वर्ग बन जायगी। तब इस दूसरे अंश का अभीष्ट दशमलव स्थान तक वर्गमूल लेकर उसमें उसके छेद के वर्गमूल से भाग दो। लब्धि अभीष्ट वर्गमूल होगी ?

उदाहरण (४) $\frac{५}{८}$ इस साधारण भिन्न संख्या का ४ दशमलव स्थान तक वर्गमूल क्या होगा ?

यहां छेद को २ से गुण देने से वर्ग होता है, अतः $\frac{५\times२}{८\times२} = \frac{१०}{१६}$, अब १० का वर्गमूल लेने के लिये न्यास,

	१० (३·१६२२
	९
६१	१००
१	६१
६२६	३९००
६	३७५६
६३२२	१४४००
२	१२६४४
६३२४२	१७५६००
२	१२६४८४
६३२४४	४९११६

यहां १ इस प्रथम शेष पर दो शून्य रखने पर आगे के वर्गमूल के अंक दशमलव चिह्न के बाद रखे हैं। और यहां छेद का वर्गमूल ४ है, अतः ३·१६२२ ÷ ४ = ·७९०५५ अथवा (१२६) प्रक्रम के नोट के अनुसार ·७९०६ यह अभीष्ट वर्गमूल है।

उदाहरणमाला (३७)

निम्नलिखित संख्याओं का वर्गमूल निकालो ।

(१) ३२४; १३६९; ४०९६; ७९२९; १३२२५ । (२) २४०२५; ५३२९००; ७९३८८१; १०९६२०९; २८२९१२४ । (३) ३७२८७६; ५०६२५००; २९१०१८०१; ३८२९१३४४; ३९१२५०२५ । (४) ५८२६; ६८९; ६२३४६८१६; २२८७६४३०४; ३९६८२४४०३६; ६८२३१७३००६२५ (५) १९२.३७६९; ५५.९५०४; १२२६४०.०४; २३०४०९६०.०१ ।

निम्नलिखित संख्याओं के ५ दशमलव स्थानों तक आसन्न वर्गमूल निकालो

(६) ७.९२७; ७९.२७; .५६; ५.६; .०६९ । (७) १३; ६९; २४; ६७५ । (८) $\frac{१}{२}$; $\frac{३}{५}$; $\frac{७}{८}$; $\frac{१७}{१९}$; $\frac{२८}{३९}$ । (९) $\frac{३२४}{३२५}$; $\frac{५२८}{६५९}$; $\frac{७३४}{९०१}$; $\frac{१०३२}{११८९}$ ।

(१०) किसी महाजन के द्वार पर कुछ पुरुष, स्त्री और लड़के भीख मांगने आये । तब उस महाजन ने प्रत्येक पुरुष, स्त्री और लड़के को उतने पैसे दिये जितनी उनकी संख्या थी । इस तरह उसने पुरुषों को कुल ७२२५ पैसे, स्त्रियों को कुल ५३२९ पैसे और लड़कों को कुल १७६४ पैसे दिये । तब कितने पुरुष, स्त्री और लड़के थे ?

(११) वह कौनसी संख्या है जिसको उसी से गुणा करने से गुणनफल २७०४ होता है ?

(१२) एक मनुष्य ने कुछ फकीरों में उतने ही आने बाँटे जितनी फकीरों की संख्या थी । यदि उसने कुल ७ रुपये ९ आने बांटे तो फकीरों की संख्या बताओ ।

(१३) एक सेना के सैनिकों में से प्रत्येक को उतने ही पेन्स का पारितोषिक मिला, जितनी की सैनिकों की संख्या थी । यदि सबको १२ पौण्ड १२ शिलिंग १ पेन्स मिले हों, तो सैनिकों की संख्या क्या है ?

(१४) कुछ बालकों में से प्रत्येक को उतने तोले मिठाई दी गई जितने कि बालक थे । यदि कुल ५ सेर मिठाई बांटी गई हो तो बालकों की संख्या बताओ ।

(१५) एक सेनाध्यक्ष अपने सैनिकों को उतनी ही पंक्तिओं में खड़ा करता है जितने कि प्रत्येक पंक्ति में सैनिक हैं । यदि कुल सैनिकों की संख्या १९३६ हो, तो पंक्तियों की संख्या बताओ ।

घन

(१६४) प्रकार १ ला—जिस राशि का घन करना हो उसको तीन स्थानों में लिखकर उन सबका जो गुणनफल होगा वह उस राशि का घन होगा। जैसे $९^3 = ९ \times ९ \times ९ = ७२९$। यहां १ से ९ तक के अंकों के घन अवश्य कण्ठस्थ करने चाहिये। किसी भिन्न संख्या का घन करना हो तो अंश का घन अंश स्थान में और छेद का घन छेद स्थान में रखो। जैसे, $\left(\frac{५}{११}\right)^3 = \frac{१२५}{१३३१}$

प्रकार २ रा—पहले ऐसी संख्या के घन का प्रकार लिखा जाता है, जो दो अङ्कों से बनी होगी। ऐसी संख्या के एक स्थान के अङ्क को आदि और दशस्थान के अङ्क को अन्त्य मान कर उस संख्याके नीचे एक रेखा करो। फिर आदि के घन को रेखा के नीचे लिख कर उसको पहली पंक्ति कहो। तब आदि के वर्ग को तीन से और अन्त्य से गुण कर गुणनफल को दूसरी पंक्ति कहो। अब इस दूसरी पंक्ति को पहली पंक्ति के नीचे इस तरह लिखो जिससे पहली पंक्ति के दश, शत आदि स्थानों के अङ्कों के नीचे दूसरी पंक्ति के एक, दश आदि स्थान के अङ्क आवेंगे। फिर अन्त्य के वर्ग को आदि और तीन से गुण कर गुणन फल को तीसरी पंक्ति कहो। इस तीसरी पंक्ति को दूसरी पंक्ति के नीचे ऐसा लिखो जिससे दूसरी पंक्ति के दश आदि स्थानों के अङ्कों के नीचे तीसरी पंक्ति के एक, दश आदि स्थान के अङ्क रहेंगे। इसके बाद अन्त्य के घन को तीसरी पंक्ति के नीचे इस तरह लिखो जिससे तीसरी पंक्ति के दश आदि स्थानों के अङ्कों के नीचे इस घन के एक आदि स्थान के अङ्क रहेंगे। तब सब पंक्तिओं का जो योग होगा वही अभीष्ट संख्या का घन होगा। यहां आदि में एक अङ्क होने से प्रत्येक पंक्ति को ऊपर वाली पंक्ति के नीचे उसकी दाईं ओर के एक अङ्क को छोड़ कर लिखा है। अब यदि तीन अङ्क की संख्या का घन करना हो तो उद्दिष्ट संख्या की दाईं ओर के दो अङ्कों को आदि और तीसरे अङ्क को अन्त्य मान कर पूर्वोक्त क्रिया करो। और यहां आदि में दो अङ्क होने से प्रत्येक पंक्ति को ऊपर वाली पंक्ति के नीचे उसकी दाईं ओर के दो अङ्कों को छोड़ कर लिखना चाहिये। एवं यदि चार अङ्कों की संख्या का घन करना हो, तो उद्दिष्ट संख्या की दाईं ओर के तीन अङ्कों को आदि और चौथे अङ्क को अन्त्य मान कर पूर्वोक्त क्रिया करो। यहां आदि में तीन अङ्क होने से प्रत्येक पंक्ति को ऊपर वाली पंक्ति के नीचे उसकी दाईं ओर के तीन अङ्कों को छोड़ कर लिखो।

उदाहरण (१) १२५ का घन करो।

यहां पहिले उद्दिष्ट संख्या के एक और दश स्थान के अंकों से बनी २५ इस संख्या के घन के लिये न्यास,

$$\begin{array}{rcll} & & \overline{२५} & \\ ५^3 & = & १२५ & \text{पहली पंक्ति} \\ ५^2 \times २ \times ३ & = & १५० & \text{दूसरी ,,} \\ २^2 \times ५ \times ३ & = & ६० & \text{तीसरी ,,} \\ २^3 & = & \underline{८} & \text{चौथी ,,} \\ \therefore (२५)^3 & = & १५६२५ & \end{array}$$

यह उक्त संख्या का घन हुआ।

अब २५ को आदि और उद्दिष्ट संख्या के शत स्थान के १ इस अंक को अन्त्यमान कर १२५ के घन के लिये न्यास,

$$\begin{array}{rcll} & & \overline{१२५} & \\ (२५)^3 & = & १५६२५ & \text{पहली पंक्ति} \\ & & \times\times & \\ (२५)^2 \times १ \times ३ & = & १८७५ & \text{दूसरी ,,} \\ & & \times\times & \\ १^2 \times २५ \times ३ & = & ७५ & \text{तीसरी ,,} \\ & & \times\times & \\ १^3 & = & \underline{१} & \text{चौथी ,,} \\ \therefore (१२५)^3 & = & १९५३१२५ & \end{array}$$

= अभीष्ट संख्या का घन है

यह विधि अन्त्यांक से भी किया जा सकता है अर्थात् उद्दिष्ट संख्या के दश स्थान के अंक को आदि और एक स्थान के अंक को अन्त्यमान कर यह क्रिया की जा सकती है। और पहले विधि को आद्यांक विधि और इस दूसरे विधि को अन्त्यांक विधि कहते हैं। अन्त्यांक विधि में केवल बांई ओर के अन्तिम अंक से पूर्वोक्त ही क्रिया की जाती है। किन्तु पंक्ति विन्यास के लिये यह नियम है कि प्रत्येक नीचे की पंक्ति को इस तरह लिखो जिससे ऊपर वाली पंक्ति के एक स्थान के अंक की दाईं ओर नीचे की पंक्ति का एक स्थान का अंक रहेगा। यही पंक्ति विन्यास का नियम तीन, चार आदि अंकों से बनी संख्याओं के घन करने में लग सकता है। चाहे आदि में कितने भी अंक रहें।

उदाहरण (२) १२५ इसका अन्त्यांक विधि से घन करो।

यहां पहले बाईं ओर के अन्तिम दो अंकों से बनी १२ इस संख्या के अन्त्यांक विधि से घन करने के लिये न्यास,

		१२	
१^3	=	१×	पहली पंक्ति
$१^2 \times २ \times ३$	=	६×	दूसरी ,,
$२^2 \times १ \times ३$	=	१२×	तीसरी ,,
२^3	=	८	चौथी ,,
$\therefore १२^3$		१७२८	

अब १२ को आदि और ५ को अन्त्य मानकर १२५ के अन्त्यांक विधि से घन के लिये न्यास,

		१२५	
$(१२)^3$	=	१७२८×	पहली पंक्ति
$(१२)^2 \times ५ \times ३$	=	२१६०×	दूसरी ,,
$५^2 \times १२ \times ३$	=	९००×	तीसरी ,,
५^3	=	१२५	चौथी ,,
$\therefore (१२५)^3$	=	१९५३१२५	यह अभीष्ट संख्या का घन हुआ।

नोट—जब ऐसे किसी संख्या का घन करना हो जिसके अन्त में शून्य है तब शून्य को छोड़ कर शेष संख्या के घन करने के बाद, जितने शून्य होंगे, उसके तिगुने शून्य उसके बाद रखो। जैसे, $(५००)^3 = १२५०००००००$ जब कोई शून्य बीच में रहेगा तो तीन अङ्कों की संख्या का आद्यांक विधि से घन करने के लिये बीच के शून्य को छोड़ कर एक स्थान के अङ्क को आदि और शत स्थान के अङ्क को अन्त्य मान कर उक्त क्रिया करो। किन्तु पंक्तियों को दो दो स्थान बाईं ओर हटा कर लिखो। यदि दो शून्य बीच में होंगे तो एक स्थान के अङ्क को आदि और सहस्रस्थान के अङ्क को अन्त्य मान कर उक्त क्रिया करो। और यहां पंक्तिओं को तीन-तीन स्थान बाईं ओर हटा कर लिखो। इसके लिये नीचे उदाहरण दिया गया है।

उदाहरण (२) ५००४ इसका आद्यांक विधि से घन करो।

		५००४
४^3	=	६४
		XXX
$४^2 \times ५ \times ३$ =		२४०
$५^2 \times ४ \times ३$ =		३००XX
५^3	=	१२५XXX
$(५००४)^3$	=	१२५३००२४००६४

अब ५०० को आदि और ४ को अन्त्य मान कर अन्त्यांक विधि से उस उदाहरण के घन के लिये न्यास,

		५००४
$(५००)^3$	=	१२५००००००
$(५००)^2 \times ४ \times ३$	=	३००००००
$४^2 \times ५०० \times ३$	=	२४०००
४^3	=	६४
$(५००४)^3$	=	१२५३००२४००६४

प्रकार ३ रा—जिस संख्या का घन करना होगा उसके ऐसे दो खण्ड करो जिनका योग उस संख्या के तुल्य होगा। तब उस संख्या को एक खण्ड से गुणकर गुणन फल को दूसरे खण्ड से गुण दो। फिर इस गुणन फल को तीन से गुणकर गुणन फल को दोनों खण्डों के घनों के योग में जोड़ दो। योग फल अभीष्ट संख्या का घन होगा। जैसे, २३ का घन करना हो, तो २३ के (२० + ३) = २३ ऐसे दो खण्ड किये। तब २३ × २० × ३ × ३ = ४१४० इसमें $(२०)^3$ = ८००० और ३^3 = २७ इनका योग जोड दिया, तब ८००० + २७ + ४१४० = १२१६७ यह २३ का घन हुआ। अथवा, अभीष्ट संख्या के ऐसे दो खण्ड करो जिनका अन्तर इष्ट संख्या के तुल्य होगा। तब इष्ट संख्या को एक खण्ड से गुण कर गुणन फल को दूसरे खण्ड से गुण दो। फिर इस गुणन फल को तीन से गुण कर गुणन फल को दोनों खण्डों के घनान्तर में घटा दो। अन्तर इष्ट संख्या का घन होगा। जैसे, २३ के (३० − ७) = २३ ऐसे दो खण्ड किये। तब २३ × ३० × ७ × ३ = १४४९० इसको, $(३०)^3$ = २७००० और ७^3 = ३४३ इनके २६६५७ इस अन्तर में घटाया तो २६६५७ − १४४९० = १२१६७ यह २३ का घन हुआ।

(१६५) दशमलव संख्या का घन करना हो तो उसको अभिन्न संख्या मानकर अभिन्न संख्या की तरह उसका घन करो। अन्त में जो फल होगा उसमें मूल संख्या में जितने दशमलव स्थान होंगे उनके तिगुने स्थान दाईं ओर से गिन कर रखो। जैसे, $(\cdot००१)^3 = \cdot००००००००१$, यहां उक्त संख्या को अभिन्न संख्या मानने से १ हुआ, इसका घन १ इसकी बाईं ओर ८ शून्य रख कर ३ के तिगुने ९ स्थानों की पूर्ति की है।

उदाहरणमाला (३८)

निम्नलिखित संख्याओं का घन करो।

(१) १३; १७; ३७; ५९; ७५। (२) १४७; ६७०; ५७९; ५३१; ८८८। (३) १०३; ६८६; ४९६८; ८७६५। (४) ·६; ·०१; १·२; ३·५; ९·५। (५) ६·२६; ·३६४; १·०३; ३०·०२; ·०३१३; ·१०४। (६) $\frac{२}{५}$; $\frac{५}{७}$; $३\frac{२}{३}$; $७\frac{२}{५}$; $१९\frac{५}{८}$; $\frac{३}{८}$।

घनमूल

(१६६) इष्ट घन राशि के एक स्थान के अंक पर बिन्दु करके उससे क्रमशः चौथे चौथे स्थान के अंक पर बिन्दु करो। तब बिन्दुओं से बने हुए यह घनराशि के विभाग होंगे। यहां भी जितने बिन्दु होंगे उतने ही घनमूल में अंक होंगे। पहले घनभाग में कहीं एक या दो अंक भी रह सकते हैं। तब पहिले घन-विभाग की संख्या में उससे छोटा और बड़ा से बड़ा घन घटा कर उस घन के मूल को लब्धिस्थान में दाईं ओर लिखो। यह घनमूल का पहला अंक होगा। तब शेष पर दूसरे बिन्दु तक की संख्या उतारो। और इसको प्रथम भाज्य कहो। इसकी बाईं ओर भागहार की तरह भाजक स्थान में घनमूल के पहले अंक के वर्ग को त्रिगुण और शत गुण कर रखो। और इसको अपूर्ण भाजक कहो। इसके भी बाईं ओर मूल के पहले अंक को त्रिगुण कर लिखो। और इसको पहली पंक्ति कहो। तब प्रथम भाज्य में अपूर्ण भाजक का भाग देने पर जो अंक लब्ध होगा उसको मूल की दाईं ओर लिखो। यह मूल का दूसरा अंक होगा। इसी दूसरे अंक को प्रथम पंक्ति की दाईं ओर लिख कर उस पंक्ति को इसी अंक से गुण दो और गुणनफल को क्षेप कहो। इस क्षेप को अपूर्ण भाजक के नीचे

लिखकर इसको अपूर्ण भाजक में जोड़ दो और योग फल को पूर्ण भाजक क
इस पूर्ण भाजक को मूल के दूसरे अंक से गुण कर गुणनफल को प्रथम भाज्य
घटा दो। और शेष पर तीसरे बिन्दु तक की संख्या उतारो। और इसको दू
भाज्य कहो। फिर मूल के दूसरे अंक के वर्ग को पूर्ण भाजक के नीचे रखकर
वर्ग, पूर्ण भाजक और क्षेप इन तीनों का योग करो। और शतगुणित योगफल
दूसरा अपूर्ण भाजक कहो। तब मूल के दूसरे अंक को दूना करके उसको प्र
पंक्ति के नीचे लिखो। और उसको प्रथम पंक्ति में जोड़ कर योगफल को दू
पंक्ति कहो। फिर यही क्रिया आगे करो। इस प्रकार बार बार करने पर यदि
शेष न बचे, तो लब्धि स्थान में जो अंक होंगे वही उद्दिष्ट संख्या का घन
होगा। यह सब क्रिया नीचे के उदाहरण से स्पष्ट होगी। यहां भी अन्तिम
को तीन से भागने पर अभीष्ट घनमूल होता है।

उदाहरण (१) ८१९५५२८५५१२३३६८ इसका घनमूल क्या होगा?

न्यास, घन घन

८१९५५२८५५१२३३६८ (९३५८
७२९

पङ्क्ति			
२७३	अपूर्ण भाजक	२४३००	९०५५२ प्रथम भाज्य
+६	क्षेप	+८१९	
२७९५	पूर्ण भाजक	२५११९	७५३५७
+१०		९	
२८०५८	अपूर्ण भाजक	२५९४७००	१५१९५८५५ द्वितीयभा.
+१६	क्षेप	+१३९७५	
२८०७४२	पूर्ण भाजक	२६०८६७५	१३०४३३७५
+४		२५	
२८०७४६	अपूर्ण भाजक	२६२२६७५००	२१५२४८०१३३ तृ.भा.
	क्षेप	+२२४४६४	
	पूर्ण भाजक	२६२४९१९६४	२०९९९३५७१२
		६४	
	अपूर्ण भाजक	२६२७१६४९२००	५२५४४४२१३६८ च.भा.
	क्षेप	+५६१४८४	
	पूर्ण भाजक	२६२७२२१०६८४	५२५४४४२१३६८
			....

यहां पहले बिन्दु तक की संख्या ८१९ इसमें ९ का घन ७२९ को घटाकर ९० इस शेष पर दूसरे बिन्दु तक कि ५५२ इस संख्या को उतारा, तब ९०५५२ यह प्रथम भाज्य हुआ, फिर ७२९ के घनमूल ९ को मूलस्थान में दाईं ओर रख कर ८१ × ३ × १०० = २४३०० इस अपूर्ण भाजक को बाईं ओर रखा, इसकी बाईं ओर ९ × ३ = २७ इस प्रथम पंक्ति को रखा, अब प्रथम भाज्य में अपूर्ण भाजक का भाग देने पर ३ इस लब्धांक को मूलस्थान में ९ की दाईं ओर रख कर प्रथम पंक्ति के भी दाईं ओर रखा, तब ३ × २७३ = ८१९ इस प्रथम क्षेपक को प्रथम अपूर्ण भाजक में जोड़ने से २५११९ यह प्रथम पूर्ण भाजक हुआ, फिर त्रिगुणित प्रथम पूर्ण भाजक = ७५३५७ इसको प्रथम भाज्य में घटाकर १५१९५ इस शेष पर तीसरे बिन्दु तक की ८५५ इस संख्या को उतारा, तब १५१९५८५५ यह द्वितीय भाज्य हुआ, अब मूल के दूसरे अंक का वर्ग + पूर्ण भाजक + प्रथम क्षेप इन तीनों के योग को शतगुण करने से २५९४७०० यह दूसरा अपूर्ण भाजक हुआ, अब मूल का द्विगुणित दूसरा अंक ६ इसको प्रथम पंक्ति २७३ इसमें जोड़ने से २७९ यह दूसरी पंक्ति हुई, फिर दूसरे अपूर्ण भाजक का द्वितीय भाज्य में भाग देने पर ५ लब्ध हुआ, इसको मूलस्थान में ३ की दाईं ओर रख कर द्वितीय पंक्ति के भी दाईं ओर रखा, तब ५ × २७९५=१३९७५ इस द्वितीय क्षेप को द्वितीय अपूर्ण भाजक में जोड़ने से २६०८६७५ यह द्वितीय पूर्ण भाजक हुआ, फिर पंचगुणित द्वितीय पूर्णभाजक = १३०४३३७५ इसको द्वितीय भाज्य में घटाने से शेष २१५२४८० इस पर चौथे बिन्दु तक की १३३ यह संख्या उतारी, तब २१५२४८०१३३ यह तृतीय भाज्य हुआ, अब मूल के तीसरे अंक का वर्ग= २५, द्वितीय पूर्ण भाजक = २६०८६७५ और द्वितीय क्षेप = १३९७५, इन तीनों का शतगुणित योग = २६२२६७५०० यह तृतीय अपूर्ण भाजक हुआ, अब मूल का द्विगुणित तीसरा अंक १० इसको द्वितीय पंक्ति २७९५ इसमें जोड़ने से यह २८०५ यह तीसरी पंक्ति हुई, फिर तृतीय अपूर्ण भाजक का तृतीय भाज्य में भाग देने पर ८ लब्ध हुआ, इसको मूलस्थान में ५ की दाईं ओर रखकर तीसरी पंक्ति के भी दाईं ओर रखा, तब ८ × २८०५८ = २२४४६४ इस तीसरे क्षेप को तृतीय अपूर्ण भाजक में जोड़ने से २६२४९१९६४ यह तृतीय पूर्ण भाजक हुआ, फिर अष्टगुणित तृतीय पूर्ण भाजक को तृतीय भाज्य में घटाने से शेष ५२५४४४२१

इस पर पांचवे बिन्दु तक की २६८ यह संख्या उतारी, तब ५२५४४४२
यह चतुर्थ भाज्य हुआ, अब मूल के चौथे अंक का वर्ग, तृतीय पूर्ण
और तृतीय क्षेप इन तीनों का शतगुणित योग = २६२७१६४९२०० यह
अपूर्ण भाजक हुआ, अब मूल का द्विगुणित चौथा अंक १६ इसको २८०
तृतीय पंक्ति में जोड़ने से २८०७४ यह चौथी पंक्ति हुई, फिर चतुर्थ अपूर्ण
का चतुर्थ भाज्य में भाग देने से २ लब्ध हुआ, इसको मूलस्थान में ८ के
ओर रख कर चौथे पंक्ति के भी दाईं ओर रखा, तब २×२८०७४२=५६
इस चौथे क्षेप को चौथे अपूर्ण भाजक में जोड़ने से २६२७२२१०६
चौथा पूर्ण भाजक हुआ, फिर द्विगुणित चतुर्थ पूर्ण भाजक = ५२५४४४२
इसको चतुर्थ भाज्य में घटाने से शेष शून्य हुआ, अब मूल का द्विगुणित
अंक ४ इसको चौथे पंक्ति में जोड़ने से २८०७४६ यह अन्तिम पांचवी पंक्ति
इसमें तीन का भाग देने से ९३५८२ यह मूलस्थान की संख्या लब्ध है
अतः यह घनमूल शुद्ध है।

नोट—जब भाज्य में अपूर्ण भाजक का भाग न लगे तब मूल स्
शून्य लिख कर अपूर्ण भाजक की दाईं ओर दो शून्य लिखो और प
केवल एक शून्य रख कर आगे की क्रिया करो। यह नीचे के उदाह
स्पष्ट होगा।

उदाहरण (२) ८४२७३९२८७५ इसका घन मूल क्या होगा?

न्यास, उद्दिष्ट संख्या=८४२७३९२८७५ (२०३

				८	घनमूल
६०३	१ ली पंक्ति	अपूर्ण भाज.	१२००००	४२७३९२	प्रथम
+६		क्षेप	+१८०९		
६०९५	२ री ,,	पूर्ण भाज.	१२१८०९	३६५४२७	
+१०			९		
६१०५	३ री ,,	अपूर्ण भाज.	१२३६२७००	६१९६५८७५	द्वितीय
		क्षेप	+३०४७५		
		पूर्ण भाज.	१२३९३१७५	६१९६५८७५	
				....	

यहां अन्तिम पंक्ति = ६१०५ ÷ ३=२०३५ अतः यह घनमूल शुद्ध है

४२७ में १२०० इस अपूर्ण भाजक का भाग जाता नहीं, अतः १२०० पर दो शून्य रखे हैं, मूल स्थान में एक शून्य रख कर पहली पंक्ति की दाईं ओर एक शून्य रखा है, और प्रथम भाज्य ४२७ पर तीसरे बिन्दु तक की ३९२ यह संख्या उतार कर आगे की क्रिया की है।

(१६७) दशमलव संख्या का घन मूल निकालना हो, तो उसमें दशमलव स्थानों की संख्या तीन के किसी अपवर्त्यांक के तुल्य अवश्य होनी चाहिये। यदि वह संख्या ऐसी न हो तो उसकी दाईं ओर शून्य रख कर उसको तीन के किसी इष्ट अपवर्त्यांक के तुल्य बनाओ। फिर उस दशमलव संख्या को अभिन्न संख्या मान कर उसका घनमूल उक्त नियम से निकालो। तब उस दशमलव संख्या में बिन्दु से किये हुए जितने घन विभाग होंगे उतने दशमलव स्थान घनमूल में दाईं ओर से गिन कर बनाओ। यही अभीष्ट घनमूल होगा। यदि इस दशमलव संख्या में अभिन्न भाग भी होगा तो उस अभिन्न भाग में जितने घन विभाग होंगे उतने ही घनमूल में अभिन्न स्थान रहेंगे।

उदाहरण (३) ·१०३८२३ इस दशमलव संख्या का घनमूल निकालो।

यहां उक्त संख्या को अभिन्न संख्या मानकर घनमूल के लिये न्यास,

			१०३८२३ (४७
पं०	१२७ अपू. भाज.	४८००	६४
	×१४	८८९	३९८२३
	१४१ पू. भाज.	५६८९	३९८२३
			....

यहां घन में दशमलव स्थान ३ के अपवर्त्य ६ के तुल्य हैं, और घनविभाग २ हैं, अतः ·४७ यह अभीष्ट घनमूल है।

(१६८) जहां उद्दिष्ट संख्या अघन होती है, अर्थात् उसका घनमूल लेने पर कुछ शेष बचता है, ऐसे अघन संख्या का अभीष्ट दशमलव स्थान तक घनमूल लेना हो, तो अन्तिम शेष पर प्रत्येक स्थान के लिये तीन तीन शून्य रखकर घनफल में दशमलव स्थानों की संख्या की पूर्ति करो।

उदाहरण (४) १०२ इस संख्या का घनमूल ऐसा निकालो, जिससे उत्तर में दशमलव स्थान ३ होंगे।

उद्दिष्ट संख्या = १०२ (४·६७२ अभीष्ट घनमूल

६४

(१) पं० १२६ अपू० भाज० ४८०० ३८०००

+१२ दो० +७५६

(२) पं० १३८७ पू० भाज० ५५५६ ३३३३६

+१४ ३६

(३) पं० १४०१२ अपू० भाज० ६३४८०० ४६६४०००

+४ दो० +९७०९

(४) पं० १४०१६ पू० भाज० ६४४५०९ ४५११५६३

४९

अपू० भाज० ६५४२६७०० १५२४३७०००

दो० +२८०२४

पू० भाज० ६५४५४७२४ १३०९०९४४८

२१५२७५५२

यहां ३८… अन्तिम शे… तीन शून्य… के बाद मू… जो अंक… हुए हैं… दशमलव चि… के बाद… गया है।… मूलमें इष्ट द…मलव स्थान आने तक प्रत्येक शेष पर तीन शून्य रखे गये हैं।

(१६६) किसी अघन साधारण भिन्न संख्या का अभीष्ट दशमलव स… तक घनमूल अपेक्षित हो तो वह साधारण भिन्न यदि संक्षिप्त रूप में न हो… उसको संक्षिप्त रूप देकर उसके अंश और छेद को ऐसे अंक से गुण दो जि… छेद की संख्या पूरा घन बन जायगी। तब इस दूसरे अंश का अभीष्ट दश… स्थान तक घनमूल लेकर उसमें उसके छेद के घनमूल से भाग दो। लब्धि अ… घनमूल होगी। यदि मिश्र भिन्न होगी तो उसको विषम भिन्न का रूप देकर… क्रिया करो। घनात्मक साधारण भिन्न का घनमूल लेना हो तो अंश का घन… अंश स्थान में रखो और छेद का घनमूल छेद स्थान में रखो।

जैसे, $\sqrt[3]{\frac{३४३}{५१२}} = \frac{७}{८} = ·८७५$।

उदाहरण (५) ·$\dot{५}$ इस आवर्त दशमलव का ३ दशमलव स्थान… घनमूल निकालो।

यहां, $\cdot\dot{5} = \frac{5}{9}$ इस साधारण भिन्न के घनमूल के लिये $\frac{5 \times 3}{9 \times 3} = \frac{15}{27}$, अब, १५ के घनमूल के लिये न्यास,

```
                                        १५ (२·४६६....
                                         ८
                                        ————
(१) पं० ६४ अपू० भाज० १२००              ७०००
       +८         क्षे० +२५६
    ————         ————————
(२) पं० ७२६  पू० भाज. १४५६              ५८२४
       +१२               १६             ————
    ————         ————————
(३) पं० ७३८६ अपू० भाज. १७२८००          ११७६०००        यहां छेद का
         +१२          +४३५६                        घनमूल ३ है, अतः
    ————         ————————
(४) पं० ७३९८  पू० भाज. १७७१५६          १०६२९३६        २·४६६ ÷ ३ = ·८२२
                           ३६          ————————        यह अभीष्ट घनमूल है।
                 ————————
             अपू० भाज. १८१५४८००        ११३०६४०००
               क्षे०      +४४३१६
                 ————————
                       १८१९९११६        १०९१९४६९६
                                       ————————
                                        ३८६९३०४
```

उदाहरणमाला (३९)

निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल निकालो।

(१) ५०६५३। (२) ५९३१९। (३) ५३१४४१। (४) ५९२७०४। (५) ६५८५०३। (६) १२५९७१२। (७) १४८१५४४। (८) २५१५४५६। (९) ३४४२९५१। (१०) ४०१९६७९। (११) २०६४२५०७१। (१२) १३७१३३०६३१। (१३) २५१५९५५४२५०४८७२९। (१४) ८०६७७५६८१६१। (१५) २७५६४०२४८५१२। (१६) ८७७६५१६०३८४। (१७) ३४४३२४७०१७२९। (१८) १८८१३६५९६३६२५। (१९) ३४३०४४१०१८९००२७। (२०) ८०२४·०२४००८। (२१) २८·७६५१२६१४४। (२२) ६६·४३०१२५। (२३) ·६५८५०३। (२४) ·००००३४४२९५१। (२५) $405\frac{28}{125}$। (२६) $\frac{1331}{1728}$। (२७) $\frac{35937}{35729}$। (२८) $\frac{250}{686}$।

निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल ३ दशमलव स्थान तक निकालो।

(२९) ३। (३०) ·८। (३१) ·०२६। (३२) ·००००३। (३३) ·०८७६५४३। (३४) $\frac{3}{7}$। (३५) $\frac{2}{11}$। (३६) $\cdot\dot{3}\dot{7}$।

व्यवहारगणित

(१७०) हिन्दी भाषा के अंकगणित में इस प्रकरण का समावेश अंग्रेजी भाषा के अंकगणितानुसार ही किया गया है। वस्तुतः यह (७१) प्रक्रम में कहे हुए मिश्र गुणन का ही एक प्रकार है। किन्तु जब मिश्र संख्या का गुणक ऐसी कोई संख्या होती है जिसका पहाड़ा नहीं आता है तब मिश्र गुणन के अपेक्षा व्यवहार गणित से गुणनफल लाना अधिक सुलभ होता है। और व्यापारी लोग प्रायः इसी रीति से वस्तुओं का मूल्य, तौल आदि सुलभ रीति से लाते हैं। इस लिये इसको व्यवहारगणित कहते हैं।

(१७१) किसी वस्तु के पूरे एक भाग को सूचित करने वाली वह भिन्न होती है जिसका अंश १ होता है। और ऐसे भिन्न को इस गणित में उस वस्तु का **पूर्णभाग** कहते हैं। जैसे, ५ आ० ४ पा० का तिगुना १ रु० होता है, अतः ५ आ० ४ पा०, १ रु० का पूर्ण भाग है जो कि $\frac{1}{3}$ यह है। इसी तरह २ छटांक १ सेर का $\frac{1}{8}$ यह पूर्ण भाग है।

(१७२) जब एक वस्तु का मूल्य, लम्बाई, तौल इत्यादि दिया रहता है तब पूर्णभागों की सहायता से तत्सजातीय अनेक वस्तुओं का मूल्य, लम्बाई, तौल आदि के लाने के प्रकार को **व्यवहारगणित** कहते हैं। इसके दो भेद हैं:— **(१) अमिश्र व्यवहारगणित (२) मिश्र व्यवहारगणित।**

अमिश्र व्यवहार गणित

(१७३) जिन पदार्थों का मूल्य इत्यादि लाना होता है वे पदार्थ, और जिस एक पदार्थ का मूल्य आदि उदाहरण में दिया रहता है वह पदार्थ, यह दोनों जब एक ही जाति के या समान परिमाण के होते हैं तब वहां अमिश्र व्यवहार गणित के रीति से उत्तर लाना होता है। यदि वे पदार्थ समान परिमाण के न हों तो पहले उनको समान परिमाण के बनाकर तब उत्तर निकालना चाहिये।

जैसे, १ सेर का मूल्य २ रु० ५ आ० है तो ३२ सेर का मूल्य क्या होगा? यहाँ ३२ सेर और १ सेर यह दोनों एक ही सेर जाति के परिमाण के होने से यह अमिश्र व्यवहार गणित का विषय हो सकता है।

(१७४) जब कोई संख्या दूसरी संख्या का पूर्ण भाग नहीं होती है तब यहां भाग का भाग करना पड़ता है। जैसे, २ आना यह १ रु० का पूर्ण भाग नहीं होता है, अतः २ आना १ रु० का $\frac{1}{8}$ पूर्ण भाग और १ आना २ आ० का $\frac{1}{2}$ पूर्ण भाग

अथवा सीधे वह १ रु० का $\frac{3}{16}$ पूर्ण भाग, दोनों मिल कर ३ आने का पूर्ण भाग लिया जा सकता है। इस प्रकार के उदाहरण करने में कौन से पूर्ण भाग लेने चाहिये, इस विषय का नियम बताने की जरूरत नहीं है। क्योंकि कौनसा पूर्ण भाग लेना चाहिये यह अभ्यास से स्वयं जाना जा सकता है। तथापि रुपया और आना इन दो परिमाणों के पूर्ण भाग नीचे करके दिखलाये गये हैं। आवश्यकतानुसार अन्य परिमाणों के पूर्ण भाग इसी तरह बना लेने चाहिये।

१ रुपये के पूर्ण भाग

८ आना	० पाई	=	१ रु० का	$\frac{1}{2}$	पूर्ण भाग
५ ,,	४ ,,	=	,,	$\frac{1}{3}$	,,
४ ,,	० ,,	=	,,	$\frac{1}{4}$	,,
२ ,,	८ ,,	=	,,	$\frac{1}{6}$	,,
२ ,,	० ,,	=	,,	$\frac{1}{8}$	,,
१ ,,	० ,,	=	,,	$\frac{1}{16}$	,,

१ आने के पूर्ण भाग

६ पाई	=	१ आने का	$\frac{1}{2}$	पूर्ण भाग
४ ,,	=	,,	$\frac{1}{3}$	,,
३ ,,	=	,,	$\frac{1}{4}$	,,
२ ,,	=	,,	$\frac{1}{6}$	,,
१$\frac{1}{2}$,,	=	,,	$\frac{1}{8}$	,,
१ ,,	=	,,	$\frac{1}{12}$	,,

नोट—यहाँ पाई के स्थान में पेन्स माने तो १ शिलिंग के ये ही पूर्ण भाग होते हैं।

इसका प्रकार अच्छी तरह ध्यान में आवे, इसलिये नीचे कुछ उदाहरण दिये गये हैं।

उदाहरण—(१) एक वस्तु का मूल्य १ रु० १५ आ० ३ पाई हो तो उसी जाति के २५७ वस्तुओं का मूल्य बताओ।

	रु०	आ०	पा०	
	२५७	०	०	= १ रु० प्रति वस्तु की दर से २५७ वस्तुओं का मूल्य
८ आ० = १ रु० का $\frac{1}{2}$	१२८	८	०	= ८ आ० ,, ,,
४ आ० = ८ आ० का $\frac{1}{2}$	६४	४	०	= ४ आ० ,, ,,
२ आ० = ४ आ० का $\frac{1}{2}$	३२	२	०	= २ आ० ,, ,,
१ आ० = २ आ० का $\frac{1}{2}$	१६	१	०	= १ आ० ,, ,,
३ पा० = १ आ० का $\frac{1}{4}$	४	०	३	= ३ पा० ,, ,,
	५०१	१५	३	= योग

∴ ५०१ रु० १५ आ० ३ पा० = प्रति वस्तु १ रु० १५ आ० ३ पा० दर से २५७ वस्तुओं का मूल्य। इसी तरह पूर्ण भागों की सहायता से अ… वस्तुओं के मूल्य लाकर उनका अन्त में जो योग होगा वही उत्तर होगा।

उदाहरण—(२) यदि एक चावल के बोरे की तौल २ मन २७ सेर… तो १२५ बोरों की क्या तौल होगी?

	मन	सेर	छ०			
	१२५	०	० = १ मन प्रति बोरे के हिसाब…			
		×२			१२५ बोरों की…	
	२५०	०	० = २ मन		,,	,,
२० से० = १ मन का ½	६२	२०	० = २० सेर		,,	,,
५ से० = २० से० का ¼	१५	२५	० = ५ सेर		,,	,,
२ से० = २० से० का $\frac{1}{10}$	६	१०	० = २ सेर		,,	,,
	३३४	१५	० = योग			

∴ ३३४ म० १५ से० = २ म० २७ से० प्रति बोरे के हिसाब से १… बोरों की तौल।

उदाहरण—(३) २५७ खद्दड़ के थानों का मूल्य ७ रु० १३ आ० १०… प्रति थान की दर से निकालो।

	रु०	आ०	पा०		
	२५७	०	० = १ रु० फी थान की दर से…		
		×७		थानों का मू…	
	२४९९	०	० = ७ रु०	,,	,,
८ आ० = १ रु० का ½	१७८	८	० = ८ आ०	,,	,,
५ आ० ४ पा० = १ रु० का ⅓	११९	०	० = ५ आ० ४ पा०	,,	,,
१ आ० = ८ आ० का ⅛	(२२	५	०) = १ आ०	,,	,,
६ पा० = १ आ० का ½	११	२	६ = ६ पा०	,,	,,
	२८०७	१०	६ = योग		

∴ उक्त दर से २५७ थानों का मूल्य = २८०७ रु० १० आ० ६ पा०। य… ६ पाई का मूल्य लाघव से लाने के लिये १ आने का मूल्यक अधिक निकाला है

इसको कोष्ठ में इसलिये रखा है कि सब मूल्यों का जोड़ करते समय इस कोष्ठ के मूल्य को छोड़ दिया जाय।

नोट—यहां ८ रु० और २ आ० २ पा० का अन्तर ७ रु० १३ आ १० पा० होता है, अतः यदि लाघव के लिये ८ रु० दर के मूल्य में २ आ० २ पा० दर का मूल्य घटा दें तो भी यही उत्तर आवेगा जैसे,

	रु०	आ०	पा०	
	३५७	०	०	१ रु० प्रति थान की दर से ३५७ थानों का दाम
	×८			
	२८५६	०	० = ८ रु०	,, ,,
२ आ० = १ रु० का $\frac{१}{८}$	४४	१०	० = २ आ०	,, ,,
२ पा० = २ आ० का $\frac{१}{१२}$	३	११	६ = २ पा०	,, ,,

यहाँ २ आ० २ पा० की दर से ३५७ थानों का दाम = ४४ रु० १० आ० + ३ रु० ११ आ० ६ पा० = ४८ रु० ५ आ० ६ पा० और ८ रु० की दर से ३५७ थानों का दाम २८५६ रु० इन दोनों का अन्तर = २८०७ रु० १० आ० ६ पा० है।

उदाहरण—(४) १ मन गुड़ की कीमत ३ रु० ७ आ० ८ पाई हो तो ३४७$\frac{१}{४}$ मन की कीमत बताओ।

	रु०	आ०	पा०	
	३४७	०	०	१ रु० मन की दर से ३४७ मन- का मूल्य
	×३			
	१०४१	०	० = ३ रु०	,, ,,
४ आ० = १ रु० का $\frac{१}{४}$	८६	१२	० = ४ आ०	,, ,,
२ आ० = ४ आ० का $\frac{१}{२}$	४३	६	० = २ आ०	,, ,,
१ आ० = २ आ० का $\frac{१}{२}$	२१	११	० = १ आ०	,, ,,
६ पा० = १ आ० का $\frac{१}{२}$	१०	१३	६ = ६ पा०	,, ,,
२ पा० = ६ पा० का $\frac{१}{३}$	३	९	१० = २ पा०	,, ,,
	१२०७	४	४ = ३४७ मन की कीमत	
	+ ०	१३	११ = $\frac{१}{४}$ मन की कीमत	
	१२०८	२	३ = ३४७$\frac{१}{४}$ मन की कीमत	

यहां २४७ मन के मूल्य में १ मन का मूल्य २ रु० ७ आ० ८ पा० इसकी चौथाई जोड़ कर उत्तर लाया है।

उदाहरणमाला (४०)

अमिश्र व्यवहार गणित के प्रकार से उत्तर निकालो।

(१) २२५ पदार्थों का दाम ४ आ० २ पा० की दर से।

(२) ७३ वस्तुओं का १२ आ० ६ पा० की दर से।

(३) ८२ वस्तुओं का १५ आ० ६ पा० की दर से।

(४) ६९ का १ रु० २ आ० ३ पा० की दर से।

(५) ८३ का १ रु० ५ आ० ९ पा० की दर से।

(६) ३२४ का २ रु० ३ आ० ४ पा० की दर से।

(७) २७८ का ७ रु० १५ आ० १० पा० की दर से।

(८) ८३५ का ६ रु० १२ आ० ११ पा० की दर से।

(९) ७२९ का ५ रु० १३ आ० ९$\frac{१}{२}$ पा० की दर से।

(१०) ७६९ का ५ रु० १४ आ० ११$\frac{३}{४}$ पा० की दर से।

(११) ५९ का १ रु० ७ आ० १०$\frac{१}{२}$ पा० की दर से।

(१२) ७८३ का ६ रु० २ आ० १०$\frac{१}{२}$ पा० की दर से।

(१३) ६७७ का २ रु० १२ आ० ६ पा० की दर से।

(१४) २१७ का ५ रु० १ आ० ७$\frac{३}{४}$ पा० की दर से।

(१५) २७३ का ४ रु० २ आ० ४$\frac{३}{४}$ पा० की दर से।

(१६) ३४६$\frac{१}{२}$ का ८ रु० १० आ० ८ पा० की दर से।

(१७) ३०१$\frac{१}{४}$ का २ पौण्ड १५ शि० ७$\frac{३}{४}$ पे० की दर से।

(१८) ४४२$\frac{३}{८}$ का ७६ पौ० २ शि० ४$\frac{३}{४}$ पे० की दर से।

(१९) ३९·५ का १ रु० १३ आ० ४ पा० की दर से।

(२०) १०·८७५ का २ पौ० १७ शि० १०$\frac{१}{४}$ पे० की दर से।

मिश्र व्यवहार गणित

(१७५) अब तक ऐसे पदार्थों का तौल, मूल्य आदि लाने का प्रकार बतलाया गया है जिनकी संख्या अमिश्र अर्थात् निरवयव होती थी। अब मिश्र

व्यवहार गणित की रीति से ऐसे पदार्थों का मूल्यादि लाने का प्रकार दिखलाया जाता है जिनकी संख्या मिश्र अर्थात् सावयव होती है। और यहां जिस एक पदार्थ का मूल्यादि दिया रहता है वह उन्हीं अवयवों में से किसी एक अवयव के जाति का होता है। जैसे, एक सेर दाल की कीमत ४ आ० ६ पा० हो तो ७ मन १३ सेर ८ छ० की कीमत क्या होगी? यह भी मिश्र गुणन का ही भेद है। जहां गुण्य और गुणक दोनों की मिश्र संख्या होती है। किन्तु इस प्रकार से उनका गुणनफल लाना अधिक सुलभ होता है। अब इसका प्रकार अच्छी तरह से ध्यान में आवे इसलिये कुछ उदाहरण यहां करके दिखलाये गये हैं।

उदाहरण—(१) एक सेर चीनी ८ आ० ४ पा० में मिलती हो, तो ६ म० १२ से० १० छ० का मूल्य निकालो।

यहां ६ मन १२ सेर = ६ × ४० से० + १२ से० = २५२ सेर और २५२ = ३ × ३ × ४ × ७। अतः,

	रु०	आ०	पा०		
	०	८	४	= १	सेर का मूल्य
			× ३		
	१	९	०	= ३	से० ,,
			× ३		
	४	११	०	= ९	से० ,,
			× ४		
	१८	१२	०	= ३६	से० ,,
			× ७		
	१३१	४	०	= २५२	से० ,,
८ छ० = १ सेर का $\frac{१}{२}$	+ ०	४	२	= ८	छ० ,,
२ छ० = ८ छ० का $\frac{१}{४}$	+ ०	१	$\frac{१}{२}$	= २	छ० ,,
	१३१	९	२$\frac{१}{२}$	= २५२	से० १० छ० का मूल्य

अथवा इस उदाहरण को दूसरी तरह से किया जा सकता है। जैसे—

	रु०	आ०	पा०	
	०	८	४	= १ से० की कीमत
		×५		
	२	९	८	= ५ से० ,,
		×८		
	२०	१३	४	= १ मन ,,
		×६		
	१२५	०	०	= ६ मन ,,
१० से० = १ मन का $\frac{१}{४}$	५	३	४	= १० से० ,,
२ से० = १० से० का $\frac{१}{५}$	१	०	८	= २ से० ,,
८ छ० = २ से० का $\frac{१}{४}$	०	४	२	= ८ छ० ,,
२ छ० = ८ छ० का $\frac{१}{४}$	०	१	$\frac{१}{२}$	= २ छ० ,,
	१३१	९	२$\frac{१}{२}$	= ६ म० १२ से० १० छ० की कीमत

ऊपर के उदाहरण से स्पष्ट है कि जिन वस्तुओं का मूल्यादि ज्ञात करना होता है उनके उचित पूर्ण भाग बनाकर प्रत्येक पूर्ण भाग का मूल्यादि अलग अलग मालूम कर लेते हैं। फिर इन सब को जोड़ कर उत्तर लाया जाता है और गुणक के खण्ड करके उनसे गुणन करने में लाघव होता है। जैसा ऊपर दिखलाया गया है।

उदाहरण—(२) १४ टन ५ हंडरेडवेट २ कार्टर का मूल्य ३८ रु० १२ आ० फी टन के हिसाब से निकालो।

	रु०	आ०	पा०	
	३८	१२	०	= १ टन का मूल्य
		×७		
	२७१	४	०	= ७ टन ,,
		×२		
	५४२	८	०	= १४ टन ,,
५ हंडरेड० = १ टन का $\frac{१}{४}$	+९	११	०	= ५ हंडरेड० ,,
२ कार्टर = ५ हंडरेड० का $\frac{१}{१०}$	+०	१५	६	= २ कार्टर ,,
	५५३	२	६	= १४ ट० ५ हंडरेड० २ कार्टर का मूल्य

जब कि यहां तुमको मिश्र राशियों को पूर्ण भागों में बांट कर दाम आदि निकालने पड़ते हैं, अतः इस रीति को मिश्र व्यवहारगणित कहते हैं।

उदाहरणमाला (४१)

मिश्र व्यवहारगणित के रीति से उत्तर निकालो।

(१) ३ म० २७ से० ८ छ० का मूल्य १३ रु० ५ आ० ८ पा० फी मन की दर से।

(२) २ ट० १५ हंड० २ का० का २ पौ० १३ शि० ४ पे० प्रतिटन की दर से।

(३) ३० गज १ फुट १$\frac{1}{3}$ इञ्च का फी गज ६ पौ० ३ शि० ९ पे० की दर से।

(४) ७ म० २७ से० १० छ० का ३ रु० १३ आ० ३ पा० प्रतिमन की दर से।

(५) ९ म० १७$\frac{3}{4}$ से० का ४ रु० १० आ० ८ पा० फी मन की दर से।

(६) २ ट० १३ हंड० ३ का० ७ पौ० का १ पौ० १ शि० ४ पे० प्रतिहंड० की दरसे।

(७) ३ ट० १७ हं० ३ का० १३ पौ० १२ औंस का १ पौ० १८ शि० ९ पे० प्रति हंडरेड० की दर से।

(८) २९ ग० २ फी० ९ इञ्च का ७ शि० १०$\frac{1}{2}$ पे० प्रतिगज की दर से।

(९) १ रु० में १ आ० ४$\frac{1}{2}$ पा० की दर से ३०९० रु० ८ आ० का टैक्स क्या होगा ?

(१०) ९ रु० २ आ० ८ पा० प्रतिमन की दर से ३९ चाय के सन्दूकों का मूल्य क्या होगा, यदि प्रत्येक संदूक में २ म० १७ से० ९ छ० चाय होगी ?

(११) यदि १० वस्तुओं की कीमत ३ रु० ९ आ० ४ पा० हो, तो २५७$\frac{7}{10}$ वस्तुओं का मूल्य बताओ।

(१२) १ रु० में १४ आ० ६ पा० की दर से ५१४६ रु० १२ आ० का लाभ क्या होगा ?

(१३) फी मन ५ रु० ८ आ० की दर से २५ आटे के बोरों का मूल्य बताओ, यदि प्रत्येक बोरे का वजन ३ म० १० से० होगा।

(१४) २२५ हंड० का मूल्य फी टन २१ पौ० ५ शि० ७ पे० के हिसाब से बताओ।

(१५) किसी मनुष्य का ऋण २७९२५ रु० १४ आ० है। यदि वह १ रु० के लिये ३ आ० ४$\frac{1}{2}$ पा० दे सके तो उसके महाजन को क्या मिलेगा ?

गुणोत्तर और अनुपात

(१७६) दो संख्याओं में तुलना करके एक संख्या दूसरी संख्या की कि गुनी है अथवा वह दूसरी संख्या के किस भाग के बराबर है इसको दिख वाले सम्बन्ध को **गुणोत्तर** कहते हैं, अर्थात् पहिली संख्या में दूसरी का देने से जो लब्धि होती है वही गुणोत्तर होता है। जैसे, ८ यह संख्या ४ दूनी है इसलिये ८ में ४ का भाग देने से लब्धि २ को ८ और ४ का गु कहते हैं। और यहां ८ और ४ के बीच में भागहार के ÷ इस चिह्न को लिख कर केवल उस चिह्न के ऊपर और नीचे के दो विन्दुओं को लिख और बीच में की आड़ी रेखा को नहीं लिखते हैं। जैसे, ८ का ४ से गु दिखलाने के लिये ८ : ४ ऐसा लिखते हैं। इसको ८ के लिये जैसे ४ पढ़ते हैं। और ८ और ४ इनको गुणोत्तर के **पद** कहते हैं, इनमें ८ को पूर्व और ४ को **उत्तरपद** कहते हैं।

(१७७) यदि गुणोत्तर के दोनों पदों की संख्या पदार्थ वाचक हो तो दोनों पदार्थ एक ही जाति के और एक ही नाम के होने चाहिये। जैसे, १० और ५ सेर इनकी तुलना की जाय तो १० सेर ५ सेर के दूने हैं ऐसा सकते हैं। किन्तु १० सेर और ५ गज इनकी तुलना नहीं की जा सकती। क्यों १० सेर ५ गज के इतने गुने हैं ऐसा कहना असम्भव है।

उत्तरपद के कितने गुने के बराबर अथवा उत्तरपद के किस भाग के बरा पूर्वपद है इसको गुणोत्तर दिखलाता है, इसलिये गुणोत्तर को भिन्नसंख्या में लि कर प्रकट करते हैं, जिस भिन्नसंख्या के अंशस्थान में पूर्वपद और छेदस्थान उत्तरपद को लिखते हैं। जैसे, ३ : ५ यहां ३ और ५ का गुणोत्तर $\frac{३}{५}$ यह है, और २० : २५ यहां २० और २५ का गुणोत्तर $\frac{२०}{२५} = \frac{४}{५}$ यह होता है।

(१७८) पदार्थ वाचक संख्याओं के गुणोत्तर की संख्या पदार्थ वाचक न होती है। जैसे, १० यार्ड और ५ यार्ड इनका गुणोत्तर $\frac{१०}{५}$ यार्ड वा २ यार्ड न किन्तु २ यह सामान्य संख्या होती है। इसी तरह ८ आम और ४ आम इन गुणोत्तर $\frac{८}{४}$ वा २ यह सामान्य संख्या है २ आम गुणोत्तर नहीं होता है। यार्ड और आम यह दोनों भिन्न पदार्थ होने पर भी १० यार्ड और ५ यार्ड गुणोत्तर ८ आम और ४ आम के गुणोत्तर के तुल्य है, ऐसा हम कह सकते हैं।

(१७९) दो गुणोत्तर परस्पर समान हैं, इसको दिखलाने के लिये दोनों गुणोत्तरों के बीच में : : ऐसा अथवा = ऐसा चिह्न रखते हैं। जैसे, १० : ५ : : ८ : ४, इसका अर्थ यह होता है कि ५ का १० से जो गुणोत्तर है वही ४ का ८ से गुणोत्तर है। दो गुणोत्तरों के परस्पर समत्व सम्बन्ध को **अनुपात** वा **समानुपात** कहते हैं।

चार पदों में, दूसरे पद के जितने गुने के बराबर अथवा दूसरे पद के जितने भाग के बराबर पहिला पद होता है, यदि चौथे पद के उतने ही गुने के बराबर अथवा चौथे पद के उतने ही भाग के बराबर तीसरा पद हो तो वे चारों पद अनुपात में हैं ऐसा कहा जाता है। जब चार पद अनुपात में होते हैं, तब उनमें से पहिले और चौथे पद को **अन्त्यपद** कहते हैं और दूसरे और तीसरे पद को **मध्यपद** कहते हैं। जैसे, १० : ५ : : ८ : ४ इस अनुपात में १० और ४ को अन्त्यपद और ५ और ८ को मध्यपद कहते हैं।

(१८०) अनुपात में अन्त्यपदों का गुणनफल मध्यपदों के गुणनफल के समान होता है। जैसे, २१ : ७ : : १२ : ४ यहां अन्त्यपद २१ और ४ इनका गुणनफल २१ × ४ = ८४, और मध्यपद ७ और १२ इनका गुणनफल ७ × १२ = ८४, ये दोनों गुणनफल समान हैं। मध्यपदों के गुणनफल को एक अन्त्यपद से भाग दो तो लब्धि दूसरा अन्त्यपद होती है। जैसे, मध्यपदों का गुणनफल ८४ में २१ का भाग देने से ४ लब्धि और ४ का भाग देने से २१ लब्धि होती है। इसी तरह अन्त्यपदों के गुणनफल में एक मध्यपद का भाग दो तो दूसरा मध्यपद लब्धि होता है। जैसे, अन्त्यपद का गुणनफल ८४ में ७ का भाग दो तो १२ लब्धि और १२ का भाग दो तो ७ लब्धि होती है।

उदाहरण (१) ३, ६ और १० इनको अनुपात में लाने के लिये चौथा पद कौन हो सकता है ?

३ : ६ : : १० : इष्टसंख्या,

$$\text{अतः इष्ट संख्या} = \frac{\overset{२}{\cancel{६}} \times १०}{\cancel{३}} = २०,$$

अतः २० यह चौथा पद है।

(१८१) सजातीय तीन राशिओं में प्रथम और द्वितीय राशि का अनुपात द्वितीय और तृतीय राशि के अनुपात के तुल्य होगा, तो यह तीनों राशि निरन्तर अनुपातमें कहे जाते हैं। और द्वितीय राशि को प्रथम और तृतीय राशि

का मध्यसमानुपाती और तृतीय राशिको प्रथम और द्वितीय राशि का तृ समानुपाती कहते हैं। यहां मध्यसमानुपाती का वर्ग प्रथम और द्वितीय गुणनफल के तुल्य होता है। जैसे, २ : ६ : १२, यहां २ : ६ = ६ : १ अतः ६ को मध्यसमानुपाती और १२ को २ और ६ का तृतीय समानुपाती हैं। यहां ६ का वर्ग ३६ = १२ × ३ है।

उदाहरण (२) $\frac{५}{२८}$ और $\frac{२०}{६३}$ इनका मध्यसमानुपाती बताओ।

यहां $\frac{५}{२८}$: य : $\frac{२०}{६३}$, ऐसा अनुपात है, अतः $\frac{५}{२८} \times \frac{२०}{६३} = य^२$, अतः य=

उदाहरण (३) ७ और ५$\frac{३}{५}$ इनका तृतीयसमानुपाती बताओ।

यहां ७ : $\frac{२८}{५}$: य, ऐसा अनुपात है, तब ७ य = $\frac{२८ \times २८}{५ \times ५}$, और

$\therefore$ य = $\frac{११२}{२५}$ = ४$\frac{१२}{२५}$।

(१८२) सजातीय ४ राशिओं में प्रथम राशि का द्वितीय राशि के द्वितीय का तृतीय राशि के साथ, और तृतीय का चतुर्थ राशि के साथ अनुपात दिया रहता है, वहां ऐसे अनुपात को संबद्धानुपात कहते हैं। संबद्धा में प्रथम राशि का चतुर्थ राशि के साथ अनुपात इस तरह मालूम किया जाता है,

क : ख = ३ : ४, ख : ग = ५ : ७, ग : घ = ८ : ९ है, तब $\frac{क}{ख}$ = $\frac{ख}{ग} = \frac{५}{७}$, $\frac{ग}{घ} = \frac{८}{९}$, $\therefore$ $\frac{क}{ख} \times \frac{ख}{ग} \times \frac{ग}{घ} = \frac{३}{४} \times \frac{५}{७} \times \frac{८}{९} = \frac{१०}{२१}$, $\therefore$ क : घ=१० :

संबद्धानुपात में राशिओं का परस्पर सम्बन्ध इस तरह दिखलाया जाता है।

क : ख = ३ : ४, ख : ग = ५ : ७, ग : घ = ८ : ९ है, तब क : ख=३ ख : ग = ५ : ७, $\therefore$ १ : $\frac{७}{५}$ = ४ : $\frac{२८}{५}$, ग : घ = ८ : ९, $\therefore$ १ : $\frac{२८}{५}$: $\frac{९ \times २८}{८ \times ५}$ = $\frac{६३}{१०}$, यहां स्पष्ट मालूम होता है कि प्रत्येक अनुपात का प्रथम उसके पहिले अनुपात के अन्तिम पद के तुल्य है। अतः क : ख : ग : ३ : ४ : $\frac{२८}{५}$: $\frac{६३}{१०}$ = ३० : ४० : ५६ : ६३।

अनुपात सम्बन्ध के कुछ सिद्धान्त नीचे दिये गये हैं:—

१ ला सिद्धान्त—अनुपात में रहने वाली चार संख्याओं में पहिली दूसरी संख्या को किसी संख्या से गुण दो और उसी संख्या से तीसरी और संख्या को गुण दो तो जो चार संख्या होंगी वे भी अनुपात में होंगी।

२ रा सिद्धान्त—यदि चार संख्याएँ इस तरह लिखी जा सकें कि

और चौथी का गुणनफल दूसरी और तीसरी के गुणनफल के समान हो, तो वे चार संख्याएँ अनुपात में होंगी।

३ रा सिद्धान्त—अनुपात में रहने वाली चार संख्याओं में पहली और दूसरी संख्या का योग और पहली संख्या इनका गुणोत्तर तीसरी और चौथी संख्या का योग और तीसरी संख्या इनके गुणोत्तर के समान होता है।

४ था सिद्धान्त—अनुपात में रहने वाली चार संख्याओं में पहिली और दूसरी संख्या का अन्तर और दूसरी संख्या इनका गुणोत्तर तीसरी और चौथी संख्या का अन्तर और चौथी संख्या इनके गुणोत्तर के समान होता है।

५ वा सिद्धान्त—दिये हुए समान गुणोत्तरों के सब पूर्वपदों का योग और उत्तरपदों का योग इनका गुणोत्तर दिये हुए गुणोत्तरों में से किसी एक गुणोत्तर के समान होता है। जैसे, १० : ५ ; ८ : ४ ; ६ : ३ ; इनमें से प्रत्येक का गुणोत्तर २ होने से ये समान गुणोत्तर हैं। अब इनके पूर्वपदों का योग=१०+८+६=२४, और उत्तरपदों का योग = ५+४+३=१२, और २४ : १२ इनका भी गुणोत्तर पूर्व गुणोत्तरों में से किसी एक गुणोत्तर के समान है।

६ वा सिद्धान्त—अनुपात में रहनेवाली चार संख्याओं में पहली और तीसरी संख्या का गुणोत्तर दूसरी और चौथी संख्या के गुणोत्तर के तुल्य होता है। और इसको एकान्तरानुपात कहते हैं। जैसे, ३ : ६ : : ९ : १८ इस समानानुपात का ३ : ९ : : ६ : १८ यह एकान्तरानुपात होता है। और इसमें $\frac{३}{९} = \frac{६}{१८}$ है।

उदाहरणमाला (४२)

(१) १७ रुपये का ८ आने से गुणोत्तर क्या होगा?

(२) १३ पौण्ड का ८ पेन्स से गुणोत्तर क्या होगा?

(३) अनुपात में रहने वाले १५, १३ और २२५ यह तीन पद हैं तो चौथा पद कौन होगा?

(४) ७ : ११ और २९ : ४५ इन दो गुणोत्तरों में बड़ा गुणोत्तर कौन है?

(५) ३ : ५ ; ७ : ९ ; १३ : १७ ; २ : ११ ; इन गुणोत्तरों में सबसे छोटा गुणोत्तर कौन है?

(६) एक अनुपात में ११ और २१ यह अन्त्यपद है, और एक मध्यपद ३ है तो दूसरे मध्यपद को बताओ।

(७) वृत्त का व्यास और परिधि इनका गुणोत्तर ७ : २२ यह है यदि किसी वृत्त का परिधि ३ फू० ८ इञ्च हो, तो उसका व्यास क्या होगा ?

(८) नीचे दिये हुए अनुपातों में छूटे हुए पदों को लिखो।

२ : ५ : : * : १० ; ७ : * : : ३५ : १५ ; ५ : ८ : : ६५ : *

(९) किसी गुणोत्तर का उत्तरपद ३ रु० ६ आ० है और यदि उस गु... का $\frac{४}{३}$ यह मान हो, तो उसका पूर्वपद क्या होगा ?

(१०) किसी अनुपात में के दो गुणोत्तरों में से एक गुणोत्तर २८७ : ... यह है, दूसरे गुणोत्तर का उत्तरपद १३ रु० १४ आ० यह है, तो उसका ... क्या होगा ?

निम्नलिखित में मध्य समानुपाती राशि बताओ।

(११) ७ और २८। (१२) १३ और ११७। (१३) २$\frac{१}{२}$ और ... (१४) ·३ और ·०१२।

निम्नलिखित में तृतीय समानुपाती बताओ।

(१५) २$\frac{१}{४}$ और ७$\frac{१}{२}$। (१६) २ रु० और १ रु० ४ आ०।

(१७) यदि क : ख = ३ : ४, ख : ग = $\frac{३}{४}$: $\frac{४}{३}$ है, तो क और ग ... अनुपात बताओ।

(१८) यदि क = ख का $\frac{४}{५}$ और ख = ग का २$\frac{१}{२}$ है, तो क और ... अनुपात बताओ।

(१९) यदि क : ख = ४ : ५, ख : ग = ७ : ८ और ग : घ = ९ ... है, तो क, ख, ग और घ इनका परस्पर संबन्ध बताओ।

त्रैराशिक

(१८३) अनुपात में रहने वाले चार राशियों में से कोई तीन राशि... हुए हों तो उनसे चौथे राशि को मालूम करने के विधि को **त्रैराशिक** कहते...

(१८४) त्रैराशिक दो प्रकार का होता है : एक **समत्रैराशिक** ... दूसरा **व्यस्तत्रैराशिक**।

जब अनुपात में रहने वाले पदार्थ और उनके मूल्य, नाप किंवा वजन ... परस्पर ऐसा सम्बन्ध होता है कि एक के घटने वा बढ़ने से दूसरा क्रम से ... वा बढ़ता है, तब वे पदार्थ और उनके मूल्य आदि **समानुपात** में हैं, ऐसे...

जाता है। अर्थात् समानुपात में जो गुणोत्तर होते हैं उनमें पहिले गुणोत्तर का पूर्वपद उसके उत्तरपद से अधिक वा कम हो तो दूसरे गुणोत्तर का पूर्वपद उसके उत्तरपद से कम से अधिक वा कम होता है। और समानुपात के त्रैराशिक को सम त्रैराशिक कहते हैं।

और जब अनुपात में रहने वाले पदार्थ और उनके मूल्य, नाप किंवा वजन इनमें परस्पर ऐसा सम्बन्ध होता है कि एक के घटने वा बढ़ने से दूसरा इसके विपरीत बढ़ता वा घटता है तब वे पदार्थ और उनके मूल्य आदि **व्यस्तानुपात** में हैं ऐसा कहा जाता है। अर्थात् व्यस्तानुपात में जो दो गुणोत्तर होते हैं उनमें पहले गुणोत्तर का पूर्वपद उसके उत्तरपद से अधिक वा कम हो तो इसके विपरीत दूसरे गुणोत्तर का पूर्वपद उसके उत्तरपद से कम वा अधिक होता है। और व्यस्तानुपात के त्रैराशिक को व्यस्त त्रैराशिक कहते हैं।

जैसे, किसी आदमी को नौकर रखा जाय तो जैसे जैसे उसके नौकरी का काल बढ़ता जायगा वैसे वैसे उसकी मजदूरी बढ़ती जायगी। इसलिये यहां नौकरी का काल और मजदूरी का द्रव्य यह समानुपात में होने से इनके सम्बन्ध का त्रैराशिक समत्रैराशिक होगा। परन्तु यदि कोई एक काम करने के लिये कुछ मनुष्य नियुक्त किये जांय तो जैसी जैसी मनुष्यों की संख्या बढ़ायी जाती है वैसी वैसी उस काम को करने में लगने वाले दिनों की संख्या कम होती जाती है। इसलिये यहां मनुष्यों की संख्या और काम के दिनों की संख्या व्यस्तानुपात में होने से इस विषय का त्रैराशिक व्यस्तत्रैराशिक होता है।

(१८५) त्रैराशिक में आने वाले तीन पदों के नाम **प्रमाण, प्रमाणफल** और **इच्छा** यह होते हैं। इन तीन पदों से जो चौथा पद निकाला जाता है उसको **इच्छाफल** कहते हैं। इन तीन पदों में से दो पद अर्थात् प्रमाण और इच्छा एक जाति के होने चाहिये। और तीसरा पद अर्थात् प्रमाणफल यह इच्छा फल की जाति का होना चाहिये। जैसे, एक पैसे के ५ आम मिलते हैं तो ८ पैसे के कितने मिलेंगे? यहां १ पैसा प्रमाण, ५ आम प्रमाणफल और ८ पैसे यह इच्छा है। इनमें प्रमाण और इच्छा दोनों पैसे की जाति के हैं और प्रमाणफल और उत्तर में आने वाला इच्छाफल ये दोनों आम की जाति के हैं।

सम त्रैराशिक का न्यास

(१८६) गुणोत्तर सजातीय पदार्थों का ही निकाला जाता है, इस पूर्व नियम से सम त्रैराशिक के समानुपात में जो दो गुणोत्तर होते हैं उनमें गुणोत्तर का पूर्वपद प्रमाण और इच्छा यह उत्तरपद होता है। और दूसरे गु का पूर्वपद प्रमाणफल और उत्तरपद इच्छाफल होता है। इसलिये सम त्रै में पहिले स्थान में प्रमाण, दूसरे स्थान में इच्छा और तीसरे स्थान में प्रमा लिखा जाता है। और (१८०) प्रक्रम से दूसरे और तीसरे राशि के गुणन अर्थात् इच्छा और प्रमाणफल के गुणनफल में प्रमाण इस अन्त्यपद का देने से इच्छाफल यह दूसरा अन्त्यपद लब्ध होता है, जो कि अभीष्ट उत्त है। यदि प्रमाण और इच्छा यह एक जाति के न हों तो सवर्णन वा विवर्णन से उनको पहिले एक जाति के बना कर तब इच्छा और प्रमाणफल के गुण में प्रमाण का भाग देना चाहिये।

इससे यह नियम बनता है कि सम त्रैराशिक में प्रमाण से इच्छा अ न्यून हो तो क्रम से प्रमाणफल से इच्छाफल अधिक वा न्यून होता है। और इच्छा और प्रमाणफल के गुणनफल में प्रमाण का भाग देकर इच्छाफल वा लाया जाता है।

उदाहरण (१) एक नौकर की ८ महीने की मजदूरी ६४ रु० है उसकी १० महीने की मजदूरी क्या होगी ?

यहां ८ महीने प्रमाण, ६४ रु० प्रमाणफल और १० महीने इच्छा है इन तीनों से मजदूरी यह इच्छाफल लाना है। और जैसे जैसे नौकरी के म अधिक होंगे वैसी वैसी मजदूरी अधिक मिलेगी इसलिये मजदूरी और मही समानुपात में होने से यह सम त्रैराशिक है। अतः यहां पहिले स्थान में प्र दूसरे स्थान में इच्छा और तीसरे स्थान में प्रमाणफल को रखा। तब,

८ महीने : १० महीने : : ६४ रु० : इष्ट रुपये,

$\therefore$ इष्ट रुपये $= \frac{१० \times ६४}{८} = ८०$, $\therefore$ ८० रुपये, उत्तर,

यहां ८ महीने से १० महीने अधिक है तो ६४ रु० से ८० रु० अधिक

उदाहरण (२) एक नौकर की ६ महीने की मजदूरी ४८ रु० है उसकी १ महीने की मजदूरी क्या होगी ?

यहां जैसे जैसे नौकरी के महीने घटेंगे वैसी वैसी मजदूरी घटेगी इसलिये यह सम त्रैराशिक है। अतः,

६ महीने : १ महीना : : ४८ रु० : इष्ट रुपये,

∴ इष्ट रुपये = $\frac{१ \times ४८}{६}$ = ८, ∴ ८ रुपये, उत्तर,

यहां ६ महीने से १ महीना कम है तो ४८ रुपये से ८ रुपये कम हैं।

व्यस्त त्रैराशिक का न्यास

(१८७) व्यस्तानुपात में जो दो गुणोत्तर होते हैं उनमें से किसी एक गुणोत्तर के पूर्वपद के स्थान में उत्तरपद को और उत्तरपद के स्थान में पूर्वपद को रखने से वह व्यस्तानुपात समानुपात में परिवर्तित हो जाता है। जैसे, १० : ५ : : २ : ४ इस व्यस्तानुपात के १० : ५ इस गुणोत्तर के पदों को उनके स्थान बदल कर ५ : १० : : २ : ४ इस तरह लिखें तो यह समानुपात होता है। क्योंकि यहां ५ से १० अधिक हैं तो २ से ४ अधिक हैं। और जब कि अन्त्यपदों का घात मध्यपदों के घात के तुल्य समानुपात में ही होता है व्यस्तानुपात में नहीं होता। इसलिये तीन राशियों से चौथे राशि को लाने के लिये व्यस्त त्रैराशिक के व्यस्तानुपात को समानुपात में परिवर्तित करना चाहिये अर्थात् व्यस्त त्रैराशिक में पहले स्थान में इच्छा को, दूसरे स्थान में प्रमाण को और तीसरे स्थान में प्रमाणफल को लिखना चाहिये। और तब दूसरे और तीसरे राशि के घात में अर्थात् प्रमाण और प्रमाणफल के घात में इच्छा का भाग देकर इच्छाफल रूपी चतुर्थ राशि को लाना चाहिये।

इससे यह नियम बनता है कि व्यस्त त्रैराशिक में प्रमाण से इच्छा अधिक वा कम हो तो प्रमाणफल से इच्छाफल क्रम से कम वा अधिक होता है। और प्रमाण और प्रमाणफल के गुणनफल में इच्छा का भाग देकर इच्छाफल रूपी उत्तर लाया जाता है।

उदाहरण (३) ८ मनुष्य एक काम १५ दिन में करते हैं, तो वही काम १२ मनुष्य कितने दिन में करेंगे?

यहां ८ मनुष्य प्रमाण, १५ दिन प्रमाणफल और १२ मनुष्य इच्छा है, और इन तीनों पर से दिन यह इच्छाफल लाना है। और जैसे जैसे मनुष्य अधिक होंगे वैसे वैसे वह काम समाप्त करने में दिन कम लगेंगे अर्थात् दिनसंख्या

मनुष्यसंख्या के व्यस्तानुपात में होने से यह व्यस्त त्रैराशिक है। इसलिये पहिले स्थान में इच्छा, दूसरे स्थान में प्रमाण और तीसरे स्थान में प्रमाण को रखा। तब,

१२ मनुष्य : ८ मनुष्य : : १५ दिन : इष्ट दिन,

∴ इष्ट दिन $=\frac{८ \times १५}{१२}$ = १०, ∴ १० दिन, उत्तर,

सम और व्यस्त त्रैराशिकों में पदों के न्यास का दूसरा नियम

(१८८) इच्छाफल वा उत्तर जिस जाति का होगा उस जाति के राशि अर्थात् प्रमाणफल को सर्वदा तीसरे स्थान में रखो। और देखो कि प्रमाणफल से इच्छाफल छोटा है वा बड़ा है। यदि प्रमाणफल से इच्छाफल छोटा हो तो दो राशियों में अर्थात् प्रमाण और इच्छा इन दोनों में जो छोटा होगा उसको दूसरे स्थान में रखो और बड़े को पहिले स्थान में रखो। और यदि प्रमाणफल से इच्छाफल बड़ा हो तो प्रमाण और इच्छा इनमें जो बड़ा होगा उसको दूसरे स्थान में रखो और छोटे को पहिले स्थान में रखो। तब दूसरे और तीसरे राशि के गुणनफल में पहिले राशि का भाग दो। लब्धि इच्छाफल वा उत्तर होगा। यह नियम सम और व्यस्त दोनों त्रैराशिकों में लग सकता है।

उदाहरण (४) १२ आम का मूल्य =)। है तो १००० आम का मूल्य क्या होगा?

यहां जैसे जैसे आम अधिक होंगे वैसा मूल्य अधिक होगा, इसलिये यह सम त्रैराशिक है। और यहां मूल्य लाना है जिसका सजातीय पद =)। = $\frac{१}{४}$ आना = $\frac{१}{६४}$ रु० इसको तीसरे स्थान में रखा। और यहां =)। इससे उत्तर अधिक है इसलिये शेष पद १२ आम और १००० आम इनमें १००० आम इस बड़े पद को दूसरे स्थान में और १२ आम इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। तब

१२ आम : १००० आम : : $\frac{१}{६४}$ रु० : इष्ट रु०,

∴ इष्ट रु० = $\frac{१००० \times १}{१२ \times ६४}$ = $\frac{३७५}{३२}$ रु० = ११ रु० ११ आ० ६ पा० उत्तर

उदाहरण (५) एक गाड़ीवान ३ मन चावल ७२ मील ले जाने के लिये १० रु० ८ आ० किराया लेता है, तो उतने ही किराये में ४$\frac{१}{२}$ मन चावल कितने मील ले जायगा?

$४\frac{१}{२}$ मन $= \frac{९}{२}$ मन, और यहां किराया एक ही होने से जैसे जैसे बोझा अधिक होगा वैसी मील की संख्या कम होगी इसलिसे यह व्यस्त त्रैराशिक है। और यहां मील की संख्या लाना है इसलिये उसके सजातीय ७२ मील इस प्रमाणफल को तीसरे स्थान में रखा, और बोझा अधिक होने से उत्तर ७२ मील से कम आवेगा, इसलिये शेष पद ३ मन और $\frac{९}{२}$ मन इनमें ३ मन इस छोटे पद को दूसरे स्थान में और $\frac{९}{२}$ मन इस बड़े पद को पहिले स्थान में रखा। तब,

$\frac{९}{२}$ मन : ३ मन : : ७२ मील : इष्ट मील,

$\therefore$ इष्ट मील $= \frac{३ \times \overset{८}{\cancel{७२}} \times २}{\cancel{९}} = ४८$, $\therefore$ ४८ मील, उत्तर,

उदाहरण (६) १२ मनुष्यों के परिवार को ४ मन चावल १० महीनों के लिये पर्याप्त होते हैं, तो ८ मनुष्यों के परिवार को उतने ही चावल कितने समय के लिये पर्याप्त होंगे ?

यहां चावल उतने ही होने से जैसे मनुष्यों की संख्या कम होगी वैसी महीनों की संख्या अधिक होगी इसलिये यह व्यस्त त्रैराशिक है। और यहां महीने लाना है इसलिये उनके सजातीय १० महीने इस पद को तीसरे स्थान में रखा। और मनुष्य कम होने से महीने अधिक होंगे अर्थात् प्रमाणफल से इच्छाफल अधिक होगा इसलिये शेष पद १२ मनुष्य और ८ मनुष्य इनमें १२ मनुष्य इस बड़े पद को दूसरे स्थान में और ८ मनुष्य इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। तब,

८ मनुष्य : १२ मनुष्य : : १० महीने : इष्ट महीने,

$\therefore$ इष्ट महीने $= \frac{\overset{३}{\cancel{१२}} \times \overset{५}{\cancel{१०}}}{\cancel{८}} = १५$, $\therefore$ १५ महीने, उत्तर,

उदाहरण (७) प्रतिदिन १२ कोस के हिसाब से चलकर एक ग्राम से दूसरे ग्राम में पहुँचने में १० दिन लगते हैं, तो प्रतिदिन १५ कोस के हिसाब से चलने से कितने दिन लगेंगे ?

यहां दोनों ग्रामों का अन्तर कायम होने से जैसे जैसे अधिक चला जायगा वैसी दिनसंख्या कम होगी इसलिये यह व्यस्त त्रैराशिक है। और यहां दिन उत्तर लाना है इसलिये तत्सजातीय १० दिन इस पद को तीसरे स्थान में रखा। और अधिक चलने से कम दिन लगेंगे इसलिये शेष पद १२ कोस और १५ कोस

इनमें १२ कोस इस छोटे पद को दूसरे स्थान में रखा और १५ कोस इस बड़े पद को पहिले स्थान में रखा। तब,

१५ कोस : १२ कोस : : १० दिन : इष्ट दिन,

∴ इष्ट दिन = $\frac{\cancel{१२}^{४} \times \cancel{१०}^{२}}{\cancel{१५}_{\cancel{३}}}$ = ८, ∴ ८ दिन, उत्तर,

उदाहरण (८) २ हाथ चौड़े ५ गज छींट का मूल्य २॥=) रु० हो तो उतने ही मूल्य में २½ हाथ चौड़ा छींट कितना मिलेगा ?

यहां २½ हाथ = ५/२ हाथ, और मूल्य वही होने से जैसी जैसी चौड़ाई बढ़ेगी वैसी लम्बाई घटेगी इससे यह व्यस्त त्रैराशिक है। और यहां गज यह उत्तर लाना है इसलिये तत्सजातीय ५ गज इस पद को तीसरे स्थान में रखा। और चौड़ाई बढ़ने से लम्बाई घटेगी इसलिये शेष पद २ हाथ और ५/२ हाथ इनमें २ हाथ इस छोटे पद को दूसरे स्थान में रखा और ५/२ हाथ इस बड़े पद को पहिले स्थान में रखा। तब,

५/२ हाथ : २ हाथ : : ५ गज : इष्ट गज,

∴ इष्ट गज = $\frac{२ \times \cancel{५} \times २}{\cancel{५}}$ = ४, ∴ गज, उत्तर,

उदाहरणमाला (४३)

(१) एक जहाज ३२ दिन में ८०० मील जाता है, तो वह २५४० मील कितने दिन में जायगा ?

(२) २५ मनुष्य २० एकड़ जमीन पर की घास १ दिन में काटते हैं, तो उतने ही समय में ३५ मनुष्य कितने एकड़ जमीन की घास काटेंगे ?

(३) १ तोला ७ माशा सोने का मूल्य ३५ रु० १२ आ० हो, तो १ माशा ७ र० सोने का मूल्य बताओ।

(४) एक मनुष्य की वार्षिक प्राप्ति १००० रु० की है और उसको ५ पा० प्रति रुपये के हिसाब से टैक्स देना पड़ता है, तो टैक्स देने पर उस के पास कितना बचेगा ?

(५) १० बैलों का मूल्य ३५ भेडों के मूल्य के बराबर हो, तो ४९४९ भेडों को देकर कितने बैल मिल सकेंगे ?

(६) ५ फूट ऊंचे सीढी की छाया ३ फू० ९ इ० हो तो जिस सीढी की छाया ४ फू० ११ इ० है, उसकी ऊंचाई कितनी होनी चाहिये ?

(७) एक महाजन का दिवाला जब हुआ तब उसको ८५० रु० का कर्जा था, उसकी सब सम्पत्ति ४७५ रु० में बेची गयी तो उसको प्रत्येक रुपये में कितना कम देना पड़ा ?

(८) एक दिवालिये की सम्पत्ति ९६० पौंडों में बेचो गयो जिनको उसके महाजनों ने ८ शि० प्रति पौंड के हिसाब से आपस में बांट लिया, तो उसका कुल कर्जा कितना था ?

(९) एक व्यापारी को १०५३५ रु० ८ आ० का देना था जिसको उसने अपनी सब सम्पत्ति बेच कर १० आ० ८ पा० प्रति रुपये के हिसाब से देकर अदा किया तो उसकी सम्पत्ति कितने रुपयों में बेची गयी ?

(१०) एक मनुष्य की वार्षिक प्राप्ति ४००० रु० है, किन्तु टैक्स देने के बाद उसके पास ३८०० रु० बचते हैं, तो उसको प्रत्येक रुपये के लिये कितना टैक्स देन पड़ता है ?

(११) २ पा० प्रति रुपये के हिसाब से आमदनी पर का टैक्स देने पर एक मनुष्य के पास उसके वार्षिक आमदनी में से ९८ रु० १५ आ० ४ पा० शेष बचते हैं, तो उसकी वार्षिक आमदनी बताओ।

(१२) एक घड़ी ३ सेकण्ड प्रति घण्टे के हिसाब से तेज चलती है, एक दिन दोपहर को १२ बजे वह शुद्ध घड़ी से मिलाई गई, तो उसी दिन रात को ११ बजे उस अशुद्ध घड़ी के हिसाब से क्या समय होगा ?

(१३) एक दिन सुबह १० बजे एक घड़ी शुद्ध घड़ी से मिलाई गई, दूसरे दिन रात को जब ठीक ८ बजे तब उस घड़ी में ८ बजने को १० मिनट कम थे, तो बताओ वह प्रति घंटे कितना सुस्त चलती है ?

(१४) एक दिन दो पहर को १२ बजे एक घड़ी शुद्ध घड़ो से मिलाई गई, उसी दिन रात को ठीक ११ बजे उस घड़ी में ११ बज कर २ मिनट हुए थे, तो बताओ उसके दूसरे दिन रात को ठीक ८ बजे उस अशुद्ध घड़ीमें क्या समय होगा ?

(१५) १५ मनुष्य एक काम २५ दिन में करते हैं, तो वही काम ६ मनुष्य कितने दिन में करेंगे ?

(१६) एक किले को जब शत्रु ने चारो ओर से घेर लिया तब सवा सेर अन्न प्रति मनुष्य के हिसाब से १५ दिन का भोजन उस किले के लोगों के पास था,

यदि २३ दिन तक वह घेरा कायम रहता तो २३ दिन तक भोजन की कमी न होने के लिये प्रति दिन प्रति मनुष्य को कितना अन्न खाना चाहिये ?

(१७) एक किले में २८ मनुष्यों को १७½ दिन के लिये पर्याप्त भोजन था, तो ४९ दिन तक वह भोजन पर्याप्त होने के लिये उस किले में से कितने लोगों को निकल जाना चाहिये ?

(१८) २ वर्ष तक हल खीचने का काम करने वाले बैल का मूल्य ३६ रु० हो, तो ६ वर्ष तक हल खीचने वाले बैल का मूल्य बताओ।

(१९) २० रु० तोले के भाव का सोना ५ रु० में ३ माशा मिलता है, तो ३० रु० तोले के भाव का सोना उतने ही रुपयों में कितना मिलेगा ?

(२०) एक अन्न की ढेरी जब ७ सेर की टोकरी से नापी जाती है, तो १०० टोकरियां गिनती में होती हैं, यदि वह ढेरी ५ सेर की टोकरी से नापी जाय तो कितनी टोकरियों से गिनी जायगी ?

(२१) एक हौज में ८ मनुष्यों को ६ दिन के लिये पर्याप्त जल है, तो वह १८ मनुष्यों को कितने दिन के लिये पर्याप्त होगा ?

(२२) ९० दिन में एक खेत की घास कटवाने के लिये २० मनुष्यों को रखना पड़ता है, यदि १६ मनुष्य अधिक रखे जांय, तो वह कुल घास कितने दिन में काटी जायगी ?

(२३) जब चीनी रुपये में ४ सेर मिलती थी, तब एक मनुष्य के परिवार में प्रति वर्ष १०० रु० की चीनी खर्च होती थी, जब चीनी रुपये में पौने चार सेर मिलने लगी तब उस मनुष्य को यदि अधिक खर्च न करना हो, तो कितनी कम चीनी लेनी चाहिये ?

(२४) एक मनुष्य की वार्षिक प्राप्ति १५० रु० की है, और वह ३ महीने की आमदनी ४ महीने में खर्च करता है, तो साल अखीर में उसके पास कितना बचेगा ?

(२५) एक घड़ी प्रति घण्टे जितना तेज चलती है दूसरी घड़ी उतना ही प्रति घण्टे सुस्त चलती है, वे दोनों घड़ियां एक दिन १२ बजे दो पहर को शुद्ध घड़ी से मिलाई गईं, उसी दिन रात को ८ बजे उन दोनों घड़ियों में २४ सेकण्ड का अन्तर हुआ तो पहिली घड़ी प्रति घण्टे कितना तेज और दूसरी घड़ी प्रति घण्टे कितना सुस्त चलती है ?

(२६) एक काम १ पुरुष १२ दिन में करता है, वही काम १ लड़का १८ दिन में करता है तो वे दोनों मिल कर उस काम को कितने दिनों में करेंगे ?

(२७) एक काम अ और ब मिल कर ३$\frac{3}{4}$ दिन में करते हैं, अकेला अ वह काम ८$\frac{3}{4}$ दिन में करता है, तो अकेला ब उस काम को कितने दिन में करेगा ?

(२८) एक व्यापारी ने १८० रु० के जव खरीद कर उनको रुपये को १६ सेर के भाव से बेच दिया, जिससे उसको ४५ रु० का मुनाफा हुआ, तो उसने रुपये को कितने सेर के भाव से जव खरीदे थे ?

(२९) एक व्यापारी को विदेश में ५०० पौण्ड भेजना है, यदि रुपये का भाव १ शि० ४ पे० हो तो, उसको कितने रुपये भेजने चाहिये ?

(३०) एक एञ्जिन के पहिये का परिधि २२६ इञ्च है, यदि एक मिनट में उस पहिये के ९१ चक्कर होते हों, तो वह एञ्जिन एक घण्टे में कितने मील जाता है ?

(३१) एक व्यापारी ने रुपये को २४ सेर के भाव से ९० मन अन्न खरीद कर वह सब ५० रु० मुनाफे से बेच दिया, तो उसने रुपये को कितने सेर के भाव से अन्न बेचा ?

(३२) रुपये को १६ सेर के भाव से ६० रु० का अन्न खरीद कर रुपये को १२ सेर के भाव से वह बेचा जाय, तो कितने रुपये का लाभ होगा ?

(३३) एक मनुष्य की साल की आमदनी ४००० रु० है, और उसको दो पैसे प्रति रुपये के हिसाब से टैक्स देना होता है, यदि प्रति वर्ष उसके पास ५९० रु० बचते हों, तो उसका प्रति सप्ताह का खर्च बताओ।

(३४) १० पुरुष एक काम ६ दिन में करते हैं, और वही काम १८ लड़के ८ दिन में करते हैं, तो ५ पुरुष और ९ लड़के मिल कर वह काम कितने दिन में करेंगे ? और यदि उस काम के लिये ७५ रुपये मजदूरी देनी पड़ती हो, तो १ पुरुष और १ लड़का इनमें से प्रत्येक की रोज की मजदूरी बताओ।

(३५) जितने समय में अ ३ ताव कागज लिखता है, उतने ही समय में ब ५ ताव कागज लिखता है, यदि उन दोनों ने मिल कर १३६ ताव कागज लिखे, तो उनमें अ के कितने ताव कागज थे ?

(३६) अ और ब इन दोनों में ५७६ रु० बांटे गये, यदि उनके हिस्सों का गुणोत्तर ५ : ७ यह हो तो प्रत्येक को कितने रुपये मिले ?

(३७) ६० रु० प्रति महीने के हिसाब से २½ वर्ष तक खर्च करने से एक मनुष्य को कर्ज हुआ, तब उसने आगे २ वर्ष तक २७½ रु० प्रति महीने के हिसाब से खर्च कम किया, जिससे वह ऋण मुक्त हुआ, तो उसकी प्रति मास की आमदनी क्या थी ?

(३८) १० भैंस और १५ गायों को प्रति सप्ताह ४० सेर घास पर्याप्त होती है, तो ६ भैंस और १८ गायों को ३० सेर घास कितने समय के लिये पर्याप्त होगी ?

(३९) मालगाड़ी और घोड़ागाड़ी इनके गति का प्रमाण ४ : ९ यह है, घोड़ा गाड़ी ३½ घण्टे में ५५ मील जाती है, तो इतनी दूरी के ⅔ दूरी तक जाने में मालगाड़ी को कितना समय लगेगा ?

(४०) एक किसान ने ४ भैंस और ७ बैल २३८ रुपये में खरीदे, १ भैंस और १ बैल इनके मूल्य का प्रमाण ५ : २ यह हो, तो १ बैल और १ भैंस इन में से प्रत्येक का मूल्य बताओ ।

(४१) एक दूध वाले ने रुपये को १० सेर इस भाव से ४ रु० का दूध खरीदा, यदि उसको वह दूध रुपये को १२ सेर इस भाव से बेचना हो तो उसको उस दूध में कितना पानी मिलाना चाहिये ?

(४२) एक बनिये ने रुपये को सवा सेर इस भाव से ४ रु० का घी खरीद कर उसमें रुपये को डेढ सेर के भाव का ६ रु० का घी मिला दिया, तो उसको वह घी रुपये को कितने सेर के भाव से बेचना चाहिये जिससे उसको नुकसान उठाना न पड़े ?

(४३) जब ५ रु० मन के भाव से गेहूँ विकता है, तब २½ आने सेर आटा विकता है, यदि ५ रु० मन के भाव से आटा विकने लगे तो, उस वक्त गेहूँ का भाव क्या होगा ?

(४४) ३ पुरुषों का खर्च ४ लड़कों के खर्च के बराबर होता है, और ३ लड़कों का १ हफ्ते का खर्चा १ रु० ३ आ० २½ पा० हो, तो उतने ही समय में ५१ पुरुषों को कितना खर्चा लगेगा ?

(४५) अ को २$\frac{३}{७}$ मील चलने में जितना समय लगता है उतने ही समय में ब ४ मील चलता है, यदि अ ६ दिन में १६५ मील जाता है, तो ब १५ दिन में कितने मील जायगा ?

(४६) एक खेत की घास २४ भैसों को एक हप्ते के लिये पर्याप्त होती है, तो वह ६० गायों को कितने दिन के लिये पर्याप्त होगी ? यदि १ भैंस ३ गायों के इतना खाती है।

(४७) एक काम ४ पुरुष वा १४ लड़के १८ दिन में करते हैं, तो वही काम ७ पुरुष और ७ लड़के मिल कर कितने दिन में करेंगे ?

(४८) जब गेहूँ का भाव रुपये को १२ सेर होता है, तो एक परिवार का ५० रु० प्रति मास का खर्चा होता है, और वह भाव जब रुपये को १४ सेर होता है, तो प्रति मास ४८ रु० खर्च होते हैं, यदि वह भाव रुपये को १६ सेर हो तो प्रति मास कितना खर्च होगा ?

(४९) १७५ पुरुष और २४० लड़के १३३० दिन में जिनता काम करते हैं उतना ही काम ६३० पुरुष और १००५ लड़के ३५० दिन में करते हैं, तो १ पुरुष और १ लड़के के प्रति दिन के काम का गुणोत्तर क्या होगा ?

(५०) १ पुरुष प्रति दिन १ स्त्री के डेढ गुने काम के इतना काम करता है, और १ स्त्री १ लड़के के डेढ गुने काम के इतना काम करती है, तो ८ पुरुष, ५ स्त्रियां और ५ लड़के मिल कर ३६ दिन में जितना काम करते हैं उतना काम ६ पुरुष, ३ स्त्रियां और ३ लड़के मिल कर कितने दिन में करेंगे ?

बहुराशिक (पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक आदि)

(१८६) दो वा अधिक गुणोत्तरों के पूर्व पदों के गुणनफल को पूर्व पद के स्थान में और उत्तरपदों के गुणनफल को उत्तरपद के स्थान में रखने से जो नया गुणोत्तर बनेगा उसको **संयुक्तगुणोत्तर** कहते हैं।

जैसे, २ : ३; ४ : ५; ६ : ७ इन तीन गुणोत्तरों के पूर्वपद २, ४ और ६ इनका गुणनफल ४८ इसको पूर्वपद के स्थान में और उत्तरपद ३, ५ और ७ इनका गुणन फल १०५ इसको उत्तरपद के स्थान में रखने से ४८ : १०५ यह उक्त तीन गुणोत्तरों का संयुक्तगुणोत्तर कहा जाता है।

(१९०) जब एक संयुक्तगुणोत्तर दूसरे एक साधारण गुणोत्तर के समान होता है तब उनके समत्व सम्बन्ध को **संयुक्तानुपात** कहते हैं।

(१९१) दिये हुए पांच राशियों पर से छठवा राशि लाने के विधि को **पञ्चराशिक** कहते हैं। दो त्रैराशिकों से पञ्चराशिक के प्रश्नों का उत्तर हम ला सकते हैं। क्योंकि पञ्चराशि में दो त्रैराशिक होते हैं। जैसे,

उदाहरण—(१) १२ गायें १५ दिनों में १ एकड़ खेत की घास खाती है, तो ३६ गायें ३ दिनों में कितने एकड़ खेत की घास खायेंगी ?

(१) त्रैराशिक—१२ गायें कुछ दिनों में (अर्थात् १५ दिनों में) १ एकर खेत की घास खाती हैं, तो ३६ गायें उतने ही समय में कितने एकड़ खेत की घास खायेंगी ?

यह सम त्रैराशिक होने से,

१२ गायें : ३६ गायें : : १ एकड़ : इष्ट एकड़,

$\therefore$ इष्ट एकड़ $= \frac{\overset{3}{\cancel{36}} \times 1}{\cancel{12}} = 3$, $\therefore$ ३ एकड़,

(२) त्रैराशिक—१५ दिनों में कुछ गायें (अर्थात् ३६ गायें) ३ एकड़ खेत की घास खाती हैं, तो ३० दिनों में उतनी ही गायें कितने एकड़ खेत की घास खायेंगी ?

यह भी सम त्रैराशिक होने से,

१५ दिन : ३० दिन : : ३ एकर : इष्ट एकड़,

$\therefore$ इष्ट एकड़ $= \frac{\overset{2}{\cancel{30}} \times 3}{\cancel{15}} = 6$, $\therefore$ ६ एकर, उत्तर.

बहुराशिक का (पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक आदि का) नियम

(१९२) उक्त प्रश्न के ऐसे प्रश्नों का उत्तर बहुराशिक के नियम से अर्थात् पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक आदि के नियम से लाना हो, तो उत्तर के जाति के पद को अर्थात् प्रमाणफल को तीसरे स्थान में रखो। तब जो पद शेष रहेंगे उनमें से दो पद एक जाति के अवश्य रहेंगे। उनमें के प्रत्येक दो सजातीय पदों में छोटे वा बड़े पद को त्रैराशिक के नियमानुसार पहिले वा दूसरे स्थान में रखो। अर्थात् प्रमाणफल से इच्छाफल अधिक हो तो बड़े पद को दूसरे स्थान में और छोटे पद

को पहिले स्थान में, और प्रमाणफल से इच्छाफल कम हो तो छोटे पद को दूसरे स्थान में और बड़े पद को पहिले स्थान में रखो। तब पहिले स्थान के सब पदों के घात को पहिले स्थान में और दूसरे स्थान के सब पदों के घात को दूसरे स्थान में रखो। तब दूसरे स्थान के पदों के घात को तीसरे पद से अर्थात् प्रमाण-फल से गुण दो और गुणनफल में पहिले स्थान के पदों के घात का भाग दो तो अभीष्ट उत्तर वा इच्छाफल लब्ध होगा।

जैसे ऊपर के उदाहरण में उत्तर एकड़ जाति का होगा इसलिये उसके सजातीय १ एकड़ इस पद को तीसरे स्थान में रखा। तब १२ गायें १ एकड़ खेत की घास नियत समय में खाती हैं तो ३६ गायें उतने ही समय में अधिक एकड़ खेत की घास खायेंगी। अतः उत्तर अधिक आने से १२ गायें और ३६ गायें इन दो सजातीय पदों में ३६ गायें इस बड़े पद को दूसरे स्थान में और १२ गायें इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। एवं १५ दिनों में कुछ गायें १ एकड़ खेत की घास खाती हैं तो ३० दिनों में उतनी ही गायें अधिक एकड़ खेत की घास खायेंगी। अतः उत्तर अधिक आने से १५ दिन और ३० दिन इन दो सजातीय पदों में ३० दिन इस बड़े पद को दूसरे स्थान में और १५ दिन इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। तब पदों का न्यास नीचे लिखे अनुसार होता है।

१२ गायें : ३६ गायें }
१५ दिन : ३० दिन } : : १ एकड़ : इष्ट एकड़,

अब १२ गायें : ३६ गायें, और १५ दिन : ३० दिन इन दो गुणोत्तरों से संयुक्तगुणोत्तर १२ × १५ : ३६ × ३० यह होता है तब इस संयुक्तगुणोत्तर का और १ एकड़ : इष्ट एकड़, इस साधारण गुणोत्तर का संयुक्तानुपात नीचे लिखे अनुसार होता है।

१२ × १५ : ३६ × ३० : : १ एकड़ : इष्ट एकड़,

अतः (१४०) प्रक्रम से, इष्ट एकड़ = $\frac{३६ \times ३० \times १}{१२ \times १५}$ = ६, ∴ ६ एकड़, उत्तर,

उदाहरण (२) १५ मनुष्य एक काम २० दिन में करते हैं, तो १० मनुष्य उस काम का तिगुना काम कितने दिनों में करेंगे ?

इस प्रश्न का उत्तर बहुराशिक के नियम से निकाला जाय तो यहां उत्तर दिन जाति का होने से तत्सजातीय २० दिन इस पद को तीसरे स्थान में रखा।

अब १५ मनुष्य १ काम २० दिन में करते हैं तो वही काम १० मनुष्य अ
दिन में करेंगे। अतः उत्तर अधिक होने से १५ मनुष्य और १० मनुष्य इन
सजातीय पदों में १५ मनुष्य इस बड़े पद को दूसरे स्थान में और १० म
इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। एवं १ काम कुछ मनुष्य २० दिन
करते हैं, तो तिगुना काम उतने ही मनुष्य अधिक दिन में करेंगे। अतः उ
अधिक आने से १ काम और ३ काम इन दो सजातीय पदों में ३ काम इस ब
पद को दूसरे स्थान में और १ काम इस छोटे पद को पहिले स्थान में रख
तब पदों का न्यास इस तरह से होता है:—

$$\left.\begin{matrix}\text{१० मनुष्य : १५ मनुष्य}\\ \text{१ काम : ३ काम}\end{matrix}\right\} :: \text{२० दिन : इष्ट दिन,}$$

इस पर से संयुक्तानुपात का स्वरूप यह होता है:—

$$१० \times १ : १५ \times ३ :: २० \text{ दिन : इष्ट दिन,}$$

$$\therefore \text{ इष्ट दिन} = \frac{१५ \times ३ \times २०}{१० \times १} = ९०, \; \therefore \; ९० \text{ दिन, उत्तर,}$$

ऊपर के दोनों उदाहरण पञ्चराशिक के हैं। क्योंकि दोनों में पांच दिये हु
राशियों से छठवा राशि लाया गया है। और प्रत्येक उदाहरण का संयुक्तगुणो
दो साधारण गुणोत्तरों से बना है। एवं पहिले उदाहरण का संयुक्तानुपात द
समानुपातों से बना है और दूसरे उदाहरण का संयुक्तानुपात दो ऐसे अनुपातों
बना है जिनमें पहिला व्यस्तानुपात और दूसरा समानुपात है। अब नीचे स
राशिक का उदाहरण दिया जाता है जिसमें सात दिये हुए राशियों से आठ
राशि लाया जाता है। और जिसमें का संयुक्तगुणोत्तर तीन साधारण गुणोत्तरों
बनाया जाता है।

उदाहरण (३) १० मनुष्य प्रतिदिन ६ घंटा काम करके १८ दिन
१८० रुपये कमाते हैं, तो १५ मनुष्य प्रतिदिन ८ घंटा काम करके २४ दिन
कितने रुपये कमायेंगे ?

यहां उत्तर रुपये की जाति का होगा इसलिये तत्सजातीय १८० रुपये इ
पद को तीसरे स्थान में रख कर शेष पदों में से प्रत्येक दो सजातीय पदों
न्यास ऊपर कहे हुए नियम के अनुसार करना चाहिये। जैसे,

१० मनुष्य : १५ मनुष्य
१८ दिन : २४ दिन } : : १८० रुपये : इष्ट रुपये,
६ घंटा : ८ घंटा

अब पूर्व नियम से संयुक्तानुपात बनाना चाहिये। जैसे,

१०×१८×६ : १५×२४×८ : : १८० रुपये : इष्ट रुपये,

$\therefore$ इष्ट रुपये $= \frac{१५ \times २४ \times ८ \times १८०}{१० \times १८ \times ६} =$ ४८०, $\therefore$ ४८० रुपये, उत्तर

यहां थोड़ा सा विचार करने पर यह बात ध्यान में आ सकती है कि इस उदाहरण का संयुक्तानुपात तीन समानुपातों से बना हुआ है जिससे इस उदाहरण का उत्तर तीन सम त्रैराशिकों से भी निकाला जा सकता है। इसी तरह नवराशिक में नौ दिये हुए राशियों से दसवाँ राशि लाया जाता है और नवराशिक का संयुक्तगुणोत्तर चार साधारण गुणोत्तरों से बनता है इसलिये नवराशिक का उत्तर ऊपर के नियम से अथवा चार त्रैराशिकों से भी लाया जा सकता है। एवं एकादशराशिक में ग्यारह दिये हुए राशियों से बारहवाँ राशि लाया जाता है। और उसका संयुक्त गुणोत्तर पांच साधारण गुणोत्तरों से बनने से उसका उत्तर ऊपर के नियम से अथवा पांच त्रैराशिकों से भी लाया जा सकता है। इसी तरह आगे त्रयोदशराशिक, पञ्चदशराशिकादि में भी समझना चाहिये।

उदाहरण (४) ४५ मन का बोझा १९८ मील तक ४॥=) रु० में भेजा जा सकता है तो ७॥) रु० में कितने मन का बोझा १३२ मील तक भेजा जा सकेगा ?

यहां ४॥=) रु० = ७५ आना और ७॥) रु० = १२० आना और मीलों की संख्या कायम रख कर जैसा बोझा बढ़ाया जायगा वैसी मजदूरी भी बढ़ेगी इसलिये बोझा और मजदूरी के सम्बन्ध का त्रैराशिक सम है।

अब मजदूरी कायम रख कर जैसी मीलों की संख्या कम की जायगी वैसा बोझा बढ़ाना पड़ेगा इसलिये बोझा और मील के सम्बन्ध का त्रैराशिक व्यस्त है। यहां कितने मन यह उत्तर लाना है, अतः बहुराशिक अथवा पञ्चराशिक के नियम से,

७५ आना : १२० आना
१३२ मील : १९८ मील } : : ४५ मन : इष्ट मन,

$$\therefore \text{इष्ट मन} = \frac{४५ \times १२० \times १९८}{७५ \times १३२} = १०८, \quad \therefore १०८ \text{ मन, उत्तर}$$

उदाहरण (५) जब चावल का भाव रुपये का ८ सेर था तब मनुष्यों को १५ रुपये के चावल १८ दिन के लिये पर्याप्त होते थे, तो रुपये के ६ सेर चावल मिलेंगे तब २४ रुपये के चावल २७ दिन के लिये कि मनुष्यों को पर्याप्त होंगे ?

यहां दिन और चावल का भाव इनको कायम रखें तो जितने अधिक खर्चे जायेंगे उतने अधिक चावल मिलेंगे और उनसे अधिक मनुष्यों का होगा, अतः रुपये और मनुष्य इनके सम्बन्ध का त्रैराशिक सम है।

रुपये और चावल का भाव कायम रख कर जैसे दिन बढेंगे वैसे कम म का पोषण होगा, अतः दिन और मनुष्य इनके सम्बन्ध का त्रैराशिक व्यस्त है

और दिन और रुपये इनको कायम रख कर जैसा चावल का भाव होगा वैसे चावल कम मिलेंगे जिससे कम मनुष्यों का निर्वाह होगा, अतः का भाव और मनुष्य इनके संबन्ध का त्रैराशिक व्यस्त है। यहां कितने मनुष्य यह उत्तर निकालना है, अतः बहुराशिक अथवा सप्तराशिक के नियम से,

१५ रुपये : २४ रुपये
२७ दिन : १८ रुपये
८ सेर : ६ सेर } : : ३० मनुष्य : इष्ट मनुष्य,

$$\therefore \text{इष्ट मनुष्य} = \frac{२४ \times १८ \times ६ \times ३०}{१५ \times २७ \times ८} = २४, \quad \therefore २४ \text{ मनुष्य, उत्तर}$$

उदाहरण (६) २० मनुष्य ४० फूट लंबा, २० फूट चौड़ा और १० गहरा तालाब २५ दिन में खोदते हैं, तो ६० मनुष्य ९० फूट लंबा ६० फूट और २० फूट गहरा तलाव कितने दिन में खोदेंगे ?

यहां मनुष्य और दिन इनके सम्बन्ध का त्रैराशिक केवल व्यस्त है, लंबाई, चौड़ाई और गहराई इनके सम्बन्ध के तीन त्रैराशिक सम हैं। और दिन निकालने हैं, इसलिये बहुराशिक अथवा नवराशिक के नियम से,

६० मनुष्य : २० मनुष्य
४० फ़ू० लं० : ९० फ़ू० लं०
२० फ़ू० चौ० : ६० फ़ू० चौ०
१० फ़ू० गह० : २० फ़ू० गह०
} : : २५ दिन : इष्ट दिन,

$\therefore$ इष्ट दिन = $\frac{२० \times ९० \times ६० \times २० \times २५}{६० \times ४० \times २० \times १०} = \frac{२२५}{२} = ११२\frac{१}{२}$,

$\therefore$ ११२$\frac{१}{२}$ दिन, उत्तर

उदाहरणमाला (४४)

(१) १२ मनुष्य १० दिन में २० रु० कमाते हैं तो ८ मनुष्य १५ दिन में कितने रुपये कमायेंगे ?

(२) ५ मनुष्य २० एकड़ जमीन की घास ७ दिन में काटते हैं तो १२ मनुष्य २१ दिन में कितने एकड़ जमीन की घास काटेंगे ?

(३) १४ घोड़ों को २० दिन के लिये ७ रु० की घास पर्याप्त होती है, १४ रु० की घास ८ दिन के लिये कितने घोड़ों को पर्याप्त होगी ?

(४) एक मनुष्य प्रतिदिन १० घंटे चल कर ५ दिन में १६० मील जाता है तो वह प्रतिदिन ८ घंटे चल कर ११ दिन में कितने मील जायगा ?

(५) १४ मनुष्य प्रतिदिन ५ घंटे काम कर के एक काम ८ दिन में समाप्त करते हैं, तो ३५ मनुष्यों को प्रति दिन कितने घण्टे काम करना चाहिये जिससे वह काम तीन दिन में समाप्त हो जाय ?

(६) जब गेहूं का भाव प्रति तीन मन ८ रु० ५ आ० ४ पा० होता है, तब २७० मनुष्यों के लिये ४८ रु० के गेहूं लगते हैं, यदि गेहूं का भाव प्रति तीन मन १० रु० हो, तो ११२ रु० के गेहूं कितने मनुष्यों के लिये पर्याप्त होंगे ?

(७) १२० सेर का बोझा २० मील तक भेजने में ५ शिलिङ्ग मजदूरी देनी पड़ती है, तो ३० मील तक ३ शिलिंग में कितना बोझा भेजा जा सकेगा ?

(८) १५०० मजदूरों को ११ मील रास्ता तैयार करने में १३ हफ्ते लगते हैं, तो २४०० मजदूरों को २७$\frac{१}{२}$ मील रास्ता तैयार करने में कितने दिन लगेंगे ।

(९) ५ मनुष्य प्रतिदिन ६ घण्टे काम कर के १२५ एकड़ जमीन की

घास ४० दिन में काटते हैं, तो १८ मनुष्य प्रतिदिन ५ घण्टे काम कर के ... दिन में कितने एकड़ जमीन की घास काटेंगे ?

(१०) एक २० फूट लम्बी, ४ फू० चौडी और ३ फू० मोटी लक्... घरन का वजन ३६०० सेर हो, तो ८ फू० लम्बी, ३ फूट चौड़ी और ६ इञ्... घरन का वजन क्या होगा ?

(११) ८० मनुष्य प्रतिदिन ४ घण्टे काम कर के ५० फू० लम्बा, ... फू० चौड़ा और ८ फू० गहरा गड्ढा ६० दिन में खोदते हैं, तो ३६ मनुष्य ... ही लम्बा, १० फू० चौड़ा और ३ फू० गहरा दूसरा गड्ढा कितने घण्टे प्रति... काम कर के १८ दिन में खोदेंगे ?

(१२) जब ४ पुरुषों को ७ स्त्रियों के इतनी और १ स्त्री को २ लड़कों ... इतनी मजदूरी मिलती है, तब ६ पुरुष, १० स्त्रियां और १४ लड़के मिल ... दिन में ५५ रु० कमाते हैं, तो उसी मजदूरी के हिसाब से ८ पुरुष और ६ ... १० दिन में कितने रुपये कमायेंगे ?

काल, काम और गति आदि के उदाहरण

उदाहरण—(१) एक मजदूर अपने लड़के से दूना काम प्रतिदिन कर... तो जितना काम लड़का १८ दिन में करेगा उतना काम दोनों मिलकर कितने ... में करेंगे ?

लड़का १८ दिन में जितना काम करेगा उसका $\frac{१}{१८}$ काम १ दिन में क... और $\frac{१}{१८}$ इसका दूना अर्थात् $\frac{१}{९}$ काम वह मजदूर १ दिन में करेगा। ... मजदूर और लड़का इन का प्रतिदिन का काम $= \frac{१}{१८} + \frac{१}{९} = \frac{१}{६}$, अब ... मिल कर उस काम को कितने दिन में करेंगे यह निकालना है, इस... त्रैराशिक से,

$\frac{१}{६}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन = ६ दिन उत्तर,

अथवा, लड़के से दूना काम मजदूर करता है इसलिये १ मजदूर ... काम = २ लड़कों का काम, और १ मजदूर और १ लड़के का प्रतिदिन का का... ३ लड़कों का प्रतिदिन का काम, अब उक्त उदाहरण का स्वरूप ऐसा होगा ... एक लड़का १ काम १८ दिन में करता है, तो ३ लड़के कितने दिन में करें... यहां लड़के अधिक हैं इसलिये दिन कम लगेंगे, अतः यह व्यस्तत्रैराशिक है...

२ लड़के : १ लड़का : : १८ दिन : इष्ट दिन = ६ दिन उत्तर,

उदाहरण—(२) एक काम अ और ब मिल कर ९ दिन में करते हैं, अ और क मिल कर १२ दिन में करते हैं, ब और क मिल कर १५ दिन में करते हैं, तो तीनों मिल कर उस काम को कितने दिन में करेंगे और उनमें से प्रत्येक वह काम कितने दिन में करेगा ?

९ दिन : १ दिन : : १ काम : इष्ट काम = $\frac{१}{९}$ अ और ब का रोज का काम,

१२ दिन : १ दिन : : १ काम : इष्ट काम = $\frac{१}{१२}$ अ और क का रोज का काम,

१५ दिन : १ दिन : : १ काम : इष्ट काम = $\frac{१}{१५}$ ब और क का रोज का काम,

∴ २ अ, २ ब और २ क इन का रोज का काम = $\frac{१}{९}+\frac{१}{१२}+\frac{१}{१५}=\frac{४७}{१८०}$,

∴ अ, ब और क इन का रोज का काम = $\frac{४७}{१८०}\div २=\frac{४७}{३६०}$,

अब तीनों मिल कर कितने दिन में करेंगे यह निकालना है, अतः

$\frac{४७}{३६०}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन = $\frac{३६०}{४७}=७\frac{३१}{४७}$ दिन, यह एक उत्तर है,

फिर, अ, ब और क इन का रोज का काम = $\frac{४७}{३६०}$ और अ और ब इनका रोज का काम = $\frac{१}{९}$

इन का अन्तर = $\frac{४७}{३६०}-\frac{१}{९}=\frac{७}{३६०}$ = क का रोज का काम, इसी प्रकार आगे करने से, अथवा अ और क इन के काम में से क का काम घटा कर और ब और क इन के काम में से क का काम घटा कर अ और ब का रोज का काम क्रम से $\frac{२३}{३६०}$ और $\frac{१७}{३६०}$ यह मालूम होगा। अब अ, ब और क इनमें से प्रत्येक को वह काम करने में कितने दिन लगेंगे, यह त्रैराशिक से निकालना चाहिये। जैसे,

$\frac{२३}{३६०}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन = $१५\frac{१५}{२३}$ अ के दिन,

$\frac{१७}{३६०}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन = $२१\frac{३}{१७}$ ब के दिन,

$\frac{७}{३६०}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन = $५१\frac{३}{७}$ क के दिन,

उदाहरण—(३) एक हौज में २ नल लगे हैं, उनसे वह क्रम से ६ और ९ घण्टे में भर जाता है, उस में तीसरा नल भी लगा है जिस से वह हौज ४ घण्टे में खाली हो जाता है, यदि तीनों नल एक साथ खोल दिये जांय तो वह हौज कितने समय में भरेगा ?

पानी भीतर लाने वाले नलों से १ घण्टे में $\frac{१}{६}+\frac{१}{९}=\frac{५}{१८}$ इतना हौज का भाग भरेगा, और पानी बाहर ले जाने वाले नल से १ घण्टे में $\frac{१}{४}$ हौज खाली

होगा, इसलिये तीनों नल खोल दिये जांय तो १ घण्टे में $\frac{५}{१८} - \frac{१}{४} = \frac{१}{३६}$ हौज भरेगा, इस पर से हौज भरने का काल त्रैराशिक से लाना चाहिये, जैसे,

$\frac{१}{३६}$ हौज : १ हौज : : १ घण्टा : इष्ट घण्टे = ३६ घण्टे, उत्तर,

उदाहरण—(४) अ नगर और ब नगर इन का अन्तर ४२ मील, एक मनुष्य जिस समय अ नगर से ब नगर की ओर चला उसी समय ब नगर से अ नगर की ओर दूसरा मनुष्य रवाना हुआ, एक मनुष्य प्रति घण्टे २$\frac{१}{२}$ मील और दूसरा २$\frac{३}{४}$ मील चलता है, तो उन की भेट कब और कहां होगी ? यदि दोनों मनुष्य दोनों नगरों से एक ही समय एक ही दिशा में चलें तो उन की भेट कब होगी ?

दोनों नगरों से चलते वक्त उन दो मनुष्यों में ४२ मील का अन्तर है, यह अन्तर जब न रहेगा, तभी उनकी भेट होगी, और यह अन्तर २ घण्टे में २$\frac{१}{२}$ + २$\frac{३}{४}$ = ५$\frac{१}{४}$ मील कम होता है, इसलिये त्रैराशिक से,

५$\frac{१}{४}$ मील : ४२ मील : : १ घण्टा : इष्ट घण्टे = ८ घण्टे, अर्थात् उन नगरों से चलने के ८ घण्टे बाद उन की भेट होगी, और इन ८ घण्टों में २$\frac{१}{२}$ मील प्रति घण्टे चलने वाला मनुष्य ८ × २$\frac{१}{२}$ मील = २० मील चलेगा, अतः २$\frac{१}{२}$ मील चलने वाला मनुष्य जहां से चला वहां से २० मील पर उनकी भेट होगी।

जब वे दोनों मनुष्य नगरों से एक ही दिशा में चलेंगे तो प्रति घण्टे में दोनों के बीच का अन्तर २$\frac{३}{४}$ − २$\frac{१}{२}$ = $\frac{१}{४}$ मील कम होगा, अर्थात् एक मनुष्य दूसरे से $\frac{१}{४}$ मील अधिक चलता है, तब त्रैराशिक से,

$\frac{१}{४}$ मील : ४२ मील : : १ घण्टा : इष्ट घण्टे = १६८ घण्टे, अर्थात् १६८ घण्टे में उनकी भेट होगी, उत्तर,

इससे यह नियम बनता है कि विरुद्ध दिशा में जाने से गति योग से और एक ही दिशा में जाने से गति के अन्तर से त्रैराशिक करना चाहिये।

उदाहरण (५) २ और ३ बजने के बीच में घण्टे की सुई और मिनट की सुई इन दोनों के बीच में ४ मिनट का अन्तर कब होगा ?

२ बजने के वक्त घण्टे की सुई घड़ी के २ इस अङ्क पर और मिनट की सुई १२ इस अङ्क पर रहती है, इसलिये इस वक्त मिनट की सुई और घण्टे की सुई इनके बीच में १० मिनट का अन्तर होता है, क्योंकि प्रत्येक दो अङ्कों के बीच में ५ मिनट का अन्तर होता है, अब घण्टे की सुई और मिनट की सुई इनमें

गति का गुणोत्तर ६० : ५ अथवा १२ : १ यह होने से प्रति मिनट घण्टे की सुई $\frac{१}{१२}$ मिनट चलती है, अर्थात् मिनट की सुई $१ - \frac{१}{१२} = \frac{११}{१२}$ मिनट घण्टे की सुई से अधिक चलती है।

यहां घण्टे की सुई और मिनट की सुई इनका अन्तर ४ मिनट कब होगा, यह निकालना है, ठीक २ बजे दोनों सुइयों का अन्तर १० मिनट था, इसलिये मिनट के सुई को दोनों सुइयों में का १० − ४ = ६ मिनट अन्तर कम करने के लिये कितना समय लगेगा, यह त्रैराशिक से निकालना चाहिये,

$\frac{११}{१२}$: ६ : : १ मिनट : इष्ट मिनट = $६\frac{६}{११}$ अर्थात् २ बज कर $६\frac{६}{११}$ मिनट, यह एक उत्तर है।

जब मिनट की सुई घण्टे की सुई के आगे ४ मिनट जायगी तब भी उन दोनों में उतना ही अन्तर होगा, किन्तु इस वक्त मिनट के सुई को घण्टे की सुई से २ बजने के बाद १० + ४ = मिनट अधिक चलना पड़ेगा, अतः

$\frac{११}{१२}$: १४ : : १ मिनट : इष्ट मिनट = $१५\frac{३}{११}$ अर्थात् २ बज कर $१५\frac{३}{११}$ मिनट, यह दूसरा उत्तर है।

उदाहरणमाला (४५)

(१) १ मनुष्य १ काम ९ दिन में करता है और १ लड़का वही काम १५ दिन में करता है, तो दोनों एक साथ उस काम को कितने दिन में करेंगे ?

(२) एक काम अ ८ दिन में करता है, ब १२ दिन में करता है और क ६ दिन में करता है, तो तीनों मिल कर उसको कितने दिन में करेंगे ?

(३) एक मनुष्य एक काम २० दिन में करता है, किन्तु लड़के की मदद से वह उस काम को १५ दिन में करता है, तो वह लड़का उस काम को कितने दिन में करेगा ?

(४) एक हौज में २ नल लगे हैं, एक से वह हौज ३ घण्टे में भर जाता है और दूसरे से वह $४\frac{१}{२}$ घण्टे में खाली होता है, यदि दोनों नल एक साथ खोल दिये जांय, तो वह हौज कितने समय में भरेगा ?

(५) दो मजदूर एक खेत की घास ५ दिन में काटते हैं, उन में से एक वह सब घास $८\frac{१}{३}$ दिन में काटता है, तो दूसरा वह घास कितने दिन में काटेगा ?

(६) एक काम एक पुरुष ८ दिन में करता है और १ स्त्री ९ दिन में वही

काम करती है, उन दोनों ने मिल कर २ दिन तक वह काम किया, तो बाकी बचा हुआ काम वह पुरुष कितने दिन में समाप्त करेगा ?

(७) एक हौज में दो नल लगे हैं, एक से वह ७½ घण्टे में और दूसरे से ५ घण्टे में भर जाता है, उस में एक तीसरा नल भी लगा है जिससे वह ३¾ घण्टे में खाली हो जाता है, यदि तीनों नल एक साथ खोल दिये जांय तो २½ घण्टे में उस हौज का कौन सा भाग भरेगा ?

(८) अ और ब १ काम ८ दिन में करते हैं, ब और क ९ दिन में करते हैं और अ और क १२ दिन में करते हैं, तो उनमें से प्रत्येक वह काम कितने दिन में करेगा ?

(९) अ और ब १ काम ३¾ घण्टे में करते हैं, अ और क २¾ घण्टे में करते हैं और ब और क ४½ घण्टे में करते हैं, तो तीनों मिल कर वह काम कितने घण्टे में करेंगे ?

(१०) अ, ब और क १ काम २$\frac{१८}{५१}$ दिन में करते हैं, अ और ब ३$\frac{३}{११}$ दिन में करते हैं, ब और क ३$\frac{३}{७}$ दिन में करते हैं, तो अ और ब दोनों ने मिल कर वह काम २ दिन तक करने के बाद बचा हुआ काम अ और क मिल कर कितने दिन में करेंगे ?

(११) अ और ब ये दोनों एक ही समय दो नगरों से एक दूसरे से मिलने के लिये रवाना हुए, दोनों नगरों का अन्तर ७५ मील है, अ प्रति घण्टे ३ मील और ब प्रति घण्टे ३¼ मील चलता है, तो उनकी भेट कब और कहां होगी ?

(१२) एक शहर से एक चोर चोरी करके भागा, यह खबर पुलिस को १½ घंटे बाद मालूम हुई, तब वह तुरन्त उसका पीछा करने को चला, चोर प्रति घंटे ५ मील और पुलिस प्रति घंटे ६⅔ मील चलता है, तो उनकी भेट कब और कहां होगी ?

(१३) एक स्टेशन से सुबह एक मालगाड़ी रवाना हुई और १¾ घंटे बाद एक डाकगाड़ी रवाना हुई, यदि मालगाड़ी प्रति घंटे १२ मील और डाकगाड़ी प्रति घंटे २२½ मील चलती है, तो उनकी भेट कब और कहां होगी ?

(१४) चार और पांच बजने के बीच में घंटे की और मिनट की सुई में ९ मिनट का अन्तर पहिली बार कब होगा ?

(१५) तीन बजने के वक्त पर घंटे की सुई और मिनट की सुई में १५ मिनट का अन्तर होता है, तो और कितने समय में उन दोनों सुइयों में १५ मिनट का अन्तर पहिली बार होगा ?

(१६) ८ और ९ बजने के बीच में घड़ी की दोनों सुइयां एक दूसरे के सामने कब होंगी ?

(१७) ९ और १० बजने के बीच में घड़ी की दोनों सुइयों के बीच में १ मिनट का अन्तर कब होगा ?

(१८) एक घड़ी एक दिन दोपहर को १२ बजे मिलाई गई, किन्तु उसी दिन रात को साढ़े छ बजे उस घड़ी में ६ बज कर ४२ मिनट हुए थे, तो वह घड़ी प्रतिदिन कितना तेज चलती है ?

(१९) एक घड़ी प्रतिदिन ३ मिनट सुस्त चलती है, तो दोपहर को १२ बजे उसमें क्या समय होना चाहिये, जिससे उसी दिन रात को १० बजे वह शुद्ध घड़ी के बराबर हो जाय ?

(२०) अ एक काम १५ दिन में करता है और ब वही काम १२ दिन में करता है, अ ने वह काम करना प्रारम्भ किया, आगे ब भी उसके साथ काम करने लगा, वह काम प्रारम्भ होने के दिन से ७$\frac{1}{2}$ दिन में समाप्त हुआ, तो अ और ब इन दोनों ने मिल कर उस काम को कितने दिन तक किया ?

ऐकिक नियम

(१६३) जब दो वा अधिक वस्तुओं के मूल्य, तौल आदि दिये रहते हैं तब उन वस्तुओं के सजातीय एक वस्तु का मूल्य, तौल आदि लाने के प्रकार को ऐकिक नियम कहते हैं।

इसका प्रकार—यदि एक वस्तु का मूल्यादि लाना हो तो तत्सजातीय अनेक वस्तुओं के मूल्यादि में उन वस्तुओं की संख्या का भाग दो। और यदि अनेक वस्तुओं का मूल्यादि लाना हो तो तत्सजातीय एक वस्तु के मूल्यादि को उन वस्तुओं की संख्या से गुण दो। किन्तु यहां यह ध्यान में रखना चाहिये कि यह नियम वहीं पर लगता है जहां वस्तु और उनके मूल्यादि समानुपात में रहेंगे, अर्थात् एक के घटने बढ़ने से दूसरा क्रम से घटता बढ़ता है। और जहां वस्तु और उनके मूल्यादि व्यस्तानुपात में रहेंगे, अर्थात् एक के घटने बढ़ने से दूसरा

क्रम से बढ़ता घटता है। वहां अनेक वस्तुओं के मूल्यादि को उनकी संख्या से गुण देने पर एक वस्तु का मूल्यादि होगा। और एक वस्तु के मूल्यादि में अनेक वस्तुओं की संख्या का भाग देने पर अनेक वस्तुओं का मूल्यादि होगा।

उदाहरण—(१) ११ गज कपड़े का मूल्य ३३) रु० हो तो २२ गज कपड़े का मूल्य क्या होगा ?

यहां कपड़े की दूनी लम्बाई का दूना दाम होगा, अतः समानुपात के नियम से इसका उत्तर लाना चाहिये। जैसे,

∵ ११ गज कपड़े का दाम ३३ रु०
∴ १ ,, ,, $\frac{३३}{११}$ रु० = ३ रु०
∴ २२ ,, ,, $\frac{३३}{११}$ × २२ रु० = ६६ रु०

उदाहरण—(२) ५ आदमी एक काम ३० दिन में करते हैं तो १५ आदमी उसी काम को कितने दिन में करेंगे ?

यहां जैसे जैसे आदमियों की संख्या बढ़ती जायगी, वैसे काम समाप्त होने के दिनों की संख्या घटती जायगी, अतः इसका उत्तर व्यस्तानुपात के नियम से करना चाहिये। जैसे,

∵ काम समाप्त करने में ५ आदमियों को ३० दिन लगते हैं।
∴ ,, १ ,, ३० × ५ दिन लगेंगे
∴ ,, १५ ,, $\frac{३० × ५}{१५}$ = १० दिन लगेंगे।

उदाहरण—(३) ३ मील प्रति घंटे की चाल से एक मनुष्य अपने घर से ४ घंटे में स्टेशन पहुंचता है तो ४ मील प्रति घंटे के हिसाब से चले तो उसको उतना ही चलने में कितना समय लगेगा ;

यहां जैसे जैसे मनुष्य की चाल बढ़ेगी वैसे समय कम लगेगा, अतः चाल और समय यह दो वस्तु व्यस्तानुपात में हैं।

∵ ३ मील प्रति घण्टे की चाल से ४ घण्टे में पहुँचता है।
∴ १ ,, ,, ४ × ३ ,, पहुँचेगा।
∴ ४ ,, ,, $\frac{४ × ३}{४}$ = ३ घंटे में पहुँचेगा।

उदाहरण—(४) एक जहाज के माल के $\frac{७}{८}$ भाग का मूल्य २१ पौ० १७ शि० ६ पे० हो तो उसी माल के $\frac{३}{४}$ भाग का मूल्य बताओ।

यहां जैसे जैसे भाग कम होगा वैसे मूल्य घटेगा, अतः भाग और मूल्य समानुपात में हैं। और २१ पौ० १७ शि० ६ पे० = $\frac{१७५}{८}$ पौण्ड।

∵ $\frac{७}{८}$ भाग का मूल्य $\frac{१७५}{८}$

∴ $\frac{१}{८}$,, ,, $\frac{१७५}{८ \times ७} = \frac{२५}{८}$ पौण्ड

∴ १ ,, ,, $\frac{२५}{८} \times ८ = २५$ पौण्ड।

∴ $\frac{१}{३}$,, ,, $\frac{२५}{३}$

∴ $\frac{२}{३}$,, ,, $\frac{२५ \times २}{३} = \frac{५०}{३}$ पौण्ड = १६ पौ० १३ शि० ४ पे०।

यहां ध्यान में रहे कि $\frac{७}{८}$ भाग का $\frac{१}{७}$ यह $\frac{१}{८}$ भाग होता है, अतः $\frac{७}{८}$ भाग के मूल्य में ७ का भाग दिया है।

एवं $\frac{१}{८}$ भाग का अठगुना १ भाग होता है, अतः $\frac{१}{८}$ भाग के मूल्य को ८ से गुण दिया है।

उदाहरण—(५) प्रति सेर $\frac{५}{२}$ आने की दर से ३ मन दूध खरीद कर उसमें पानी मिलाया और उसको फी सेर $\frac{३}{२}$ आने की दर से खरीदे हुए कीमत पर बेच दिया तो बताओ उसमें कितना पानी मिलाया था ?

यहां जैसे जैसे दूध की दर कम होगी वैसे उसमें पानी अधिक मिलाना पड़ेगा, अतः यह व्यस्त त्रैराशिक है। किन्तु ऐकिक नियम से इस उदाहरण को करने पर सब समानुपात ही मिलने से इसको समानुपात के नियम से ही किया गया है। जैसे,

चूँकि, १ सेर शुद्ध दूध का दाम $\frac{५}{२}$ आना है

∴ ३ मन वा १२० सेर ,, ,, $१२० \times \frac{५}{२} = ३००$ आने

अब $\frac{३}{२}$ आने में १ सेर मिश्र दूध

∴ १ ,, $१ \div \frac{३}{२} = \frac{२}{३}$ मिश्र दूध

∴ ३०० ,, $३०० \times \frac{२}{३} = २००$ सेर मिश्र दूध

∴ २०० सेर मिश्र दूध − १२० सेर शुद्ध दूध = ८० सेर = २ मन पनी।

अब तुमको मालूम हो गया होगा कि बहुत से त्रैराशिक के उदाहरण इसी ऐकिक नियम से किये जा सकते हैं। अब इसी नियम से एक बहुराशिक का उदाहरण करके दिखलाया जाता है।

उदाहरण—(६) ४५ मन का बोझा १९८ मील तक ४ रु० ११ आ० में भेजा जा सकता है तो ७ रु० ८ आ० में कितने मन का बोझा १३२ मील तक भेजा जा सकेगा ?

यहां ४ रु० ११ आ० = ७५ आ० और ७ रु० ८ आ० = १२० आ०

चूंकि, ७५ आने में १९८ मील तक ४५ मन ले जाते हैं।

∴ १ ,, ,, ,, $\frac{४५}{७५}$,, जाँयगे।

∴ १ ,, १ ,, $\frac{४५ \times १९८}{७५}$,, ,,

∴ १२० ,, १ ,, $\frac{४५ \times १९८ \times ३२०}{७५}$,, ,,

∴ १२० ,, १३२ ,, $\frac{४५ \times १९८ \times १२०}{७५ \times १३२}$,, ,,

किन्तु $\frac{४५ \times १९८ \times १२०}{७५ \times १३२}$ + १०८ ∴ १०८ मन उत्तर।

यहां मीलों की संख्या कायम रख कर जैसे जैसे बोझा बढ़ाया जायगा वैसे मजदूरी भी बढ़ती जायगी, अतः बोझा और मजदूरी समानुपात में है। और मजदूरी कायम रख कर जैसे जैसे मीलों की संख्या कम की जायगी वैसे बोझा बढ़ाना पड़ेगा, अतः बोझा और मील के सम्बन्ध का अनुपात व्यस्त है।

उदाहरणमाला (४६)

निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर ऐकिक नियम से निकालो।

(१) यदि १ मनुष्य प्रति घंटे $२\frac{३}{४}$ मील चले तो $९\frac{१}{४}$ घंटों में वह कितना चलेगा?

(२) एक मजदूर १ सप्ताह में ७ शि० ६ पे० पाता है तो ७ सप्ताह में उसे क्या मिलेगा ?

(३) फी मील $२\frac{१}{२}$ पाई के हिसाब से २४ मील का किराया क्या होगा ?

(४) ३ मन चावल ३० दिन के लिये ९ मनुष्यों को पर्याप्त हो तो १ मनुष्य को वह कितने समय के लिये पर्याप्त होगा।

(५) ३० मन चना २८ घोड़ों को १ सप्ताह के लिये पर्याप्त हो तो वह ४ सप्ताह के लिये कितने घोड़ों को पर्याप्त होगा ?

(६) यदि १८ घोड़े एक खेत को १५ दिन में जोतते हों तो कितने घोड़े उसको १ दिन में जोतेंगे ?

(७) यदि ६ मन गेहूँ का मूल्य ७ रु० ८ आ० हो तो १२ रु० ८ आ० में कितना गेहूँ खरीदा जा सकेगा ?

(८) किसी जमीन के $\frac{३}{४}$ भाग का मूल्य ९० रु० हो तो उसके $\frac{२}{३}$ भाग का मूल्य बताओ।

(९) किसी जायदाद के ·३७५ हिस्से के मालिक ने अपने हिस्से का $\frac{२}{३}$ भाग ५०४० रु० में बेचा तो उसी हिसाब से उस जायदाद के ·८७५ हिस्से का मूल्य क्या होगा ?

(१०) प्रति सेकण्ड ६ फीट चलने वाले मनुष्य से एक डाकगाड़ी १० गुना तेज चलती हो तो वह १ घंटे में कितने मील चलती है ?

(११) एक मनुष्य के द्रव्य का $\frac{२}{५}$ नष्ट हुआ और बचे हुए द्रव्य का $\frac{२}{३}$ उसने खर्च किया जिसके बाद उसके पास १२० रु० बचा रहा तो बताओ उसका कितना द्रव्य नष्ट हुआ ?

(१२) यदि ७ घोड़ों का और ५ बैलों का मूल्य ५२० रु० और १ बैल का मूल्य २० रु० हो तो एक घोड़े का मूल्य बताओ ?

(१३) यदि १५ कुर्सियों और २ मेजों का दाम ४०० रु० हो तो १२ कुर्सी और ३ मेजों का दाम क्या होगा ? जब कि कुर्सी का मूल्य ४ मेजों के मूल्य के बराबर है।

(१४) ८ घोड़े और २० भेंड़ ७ एकड़ जमीन की घास कुछ समय में खा जाते हैं तो उतने ही समय में १० घोड़े और २४ भेंड़ कितने एकड़ जमीन की घास खा जांयगे ? यदि १ घोड़ा ४ भेंड़ों के इतना खाता है।

(१५) एक किले में १२०० सिपाहियों के लिये ६० दिन का खाना था, १५ दिन बाद २०० सिपाही कहीं दूसरी जगह चले गये तो बताओ शेष सिपाहियों को बचा हुआ खाना कितने दिन के लिये पर्याप्त होगा ?

(१६) एक किले में १००० सिपाहियों के लिये ७० दिन का खाना था, अगर २० दिन के बाद २०० सिपाही उसमें और आ जाँय तो बचा हुआ खाना कितने दिनों के लिये पर्याप्त होगा ?

(१७) जितनी मजदूरी में २८ मन का बोझा ५० मील तक ले जाया जा सकता है, उतनी ही मदूरी में १२५ मील तक कितने मन का बोझा ले जाया जा सकेगा ?

(१८) एक मनुष्य कलकत्ते से हुगली फी घण्टा ४ मील की चाल ६ घंटे में पहुँचता हो तो घोड़े पर सवार होकर फी घंटा ९ मील की चाल से वह कितने समय में कलकत्ते से हुगली पहुँचेगा ?

(१९) अगर ७ मनुष्य ७ दिन में प्रतिदिन १० घंटे काम करके एक खेत की घास काट सकते हों तो ५ दिन में उस खेत की घास काटने के लिए उन मनुष्यों को प्रतिदिन कितने घंटे अधिक काम करना होगा ?

(२०) १० आदमी प्रतिदिन ७ घंटे काम करके एक काम को १२ दिन में समाप्त करते हैं तो उसी काम को प्रतिदिन कितने घंटे काम करके ... आदमी १४ दिन में समाप्त करेंगे ?

(२१) यदि ६ मनुष्य या ८ लड़के एक काम को १८ दिन में समाप्त करते हैं तो ३ मनुष्य और ५ लड़के उसी काम को कितने दिन में समाप्त करेंगे ?

(२२) अगर ३ सेर चाय का मूल्य १० सेर चीनी के मूल्य के बराबर हो तो २५ सेर चीनी के बदले में कितनी चाय देनी होगी ?

(२३) अगर ८ बैल या ६ घोड़े एक खेत की घास १० दिन में खाते हैं तो ५ बैल और ४ घोड़े उसी खेत की घास कितने दिन में खायेंगे ?

(२४) ५ मनुष्य, ७ स्त्रियां या ९ लड़के एक काम को १५ दिन में कर सकते हों तो एक मनुष्य, १ स्त्री और एक लड़का उसी काम को कितने दिन में करेंगे ?

(२५) ८ घोड़े और २० भेड़ों को एक महीने तक खिलाने में १०० रु० लगते हों तो ६ घोड़े और ५० भेड़ों को एक महीने तक खिलाने में कितना खर्च लगेगा ? यदि २ घोड़े १५ भेड़ों के इतना खाते हैं ।

औसत अथवा मध्यममान

(१६४) सजातीय अनेक संख्याओं के योगफल में वे संख्या कितनी हैं, इसको सूचित करनेवाली संख्या से भाग देने पर जो लब्धि आवेगी उसको उन संख्याओं के औसत का मूल्य वा केवल **औसत** या मध्यममान कहते हैं । अतः सजातीय अनेक संख्याओं के औसत को, वे संख्या कितनी हैं, इसको सूचित करने वाली संख्या से गुण देने पर गुणनफल उन सजातीय अनेक संख्याओं का योगफल होता है ।

उदाहरण (१) ५, ७, ९, १०, ११ इन संख्याओं की औसत क्या होगी ?

यहां, ऊपर की ५ संख्याओं की औसत = $\frac{५+७+९+१०+११}{५} = \frac{४२}{५} = ८·४$ ।

नोट—औसत में साधारण भिन्न को प्रायः दशमलव भिन्न में सूचित करने का परिपाठ है ।

उदाहरण (२) जिनकी उमर क्रम से १०, ११, १३, १४ साल है, उन चार लड़कों की उमर की औसत क्या है ?

ऊपर के ४ लड़कों की उमर की औसत = $\frac{१०+११+१३+१४}{४}$ = १२ साल ।

उदाहरण (३) एक कक्षा में २० लड़के हैं और उनके अवस्था की औसत १४·९५ साल है; उस कक्षा में एक नया लड़का आने से उनकी अवस्था की औसत १५ साल हुई, तो नये लड़के की उमर क्या है ?

सब लड़कों की अवस्थाओं का योगफल = उनके अवस्था की औसत × सब लड़कों की संख्या,

∴ २० ,, ,, ,, = १४·९५ साल × २०

∴ २१ ,, ,, ,, = १५ साल × २१

∴ नये लड़के की उमर = (१५ × २१ − १४·९५ × २०) = १६ साल

उदाहरण (४) एक कक्षा में २१ लड़के हैं; उनमें एक लड़के की उमर २० साल, २ लड़कों की उमर १९ साल, ३ लड़कों की १८ साल, ४ लड़कों की १७ साल, ५ लड़कों की १६ साल और ६ लड़कों की १५ साल थी, तो उनके उमर की औसत निकालो ।

२१ लड़कों के उमर की औसत = (२० × १ + १९ × २ + १८ × ३ + १७ × ४ + १६ × ५ + १५ × ६) साल =

$\left(\frac{२०+३८+५४+६८+८०+९०}{२१} \right)$ साल = $\frac{३५०}{२१}$ साल = १६$\frac{२}{३}$ साल = १६·६ साल ।

उदाहरण (५) सोम, मंगल, बुध और गुरु इन चार दिनों के उष्णतामान की औसत ६० डिग्री है, और मंगल, बुध, गुरु और शुक्र इन चार दिनों के उष्णतामान की औसत ६३ डिग्री है, और सोम और शुक्र इन दो दिनों के उष्णता का प्रमाण २१ : २५ है, तो इन दो दिनों के उष्णतामान को बताओ ।

यहां शुक्र का तापमान २५ − २१ = ४ अधिक है और सोमवारादि चार वारों के उष्णता का योग ६० × ४ = २४० और भौमादि चार वारों के तापमान

११ ग० द्वि०

का योग ६३ × ४ = २५२ है, इनका अन्तर १२ है, अब ४ अधिक में शु
का तापमान २५ होता है, तो १२ अधिक में शुक्र का तापमान त्रैराशिक
४ : १२ :: २५ : इष्टतापमान, ∴ इष्टतापमान = $\frac{२५ \times १२}{४}$ = ७५ डि०,
शुक्र का तापमान है। अब शुक्र के २५ तापमान में सोम का तापमान २१ है
शुक्र के ७५ तापमान में सोम का तापमान त्रैराशिक से, २५ : ७५ :: २१ :
इष्टतापमान, ∴ इष्टतापमान = $\frac{७५ \times २१}{२५}$ = ६३ डि०, यह सोम का तापमान हुआ।

उदाहरणमाला (४७)

(१) ८, १०, १३, १५, १७, २०। ३$\frac{३}{४}$, ७$\frac{३}{४}$, ५$\frac{३}{८}$, ८$\frac{३}{१६}$, १३$\frac{१}{४}$। १
७.६, ८.९, ३.१, .८ इन संख्याओं की औसत निकालो।

(२) पांच पुरुषों की उमर यथाक्रम ७४, ७९, ८०, ८३, ८९ साल है,
उनकी उमर की औसत क्या है?

(३) एक पाठशाला में २५० लड़के हैं; सोम को २१०, भौम को २०
बुध को २२०, गुरु को २३०, शुक्र को २२५ और शनि को २०१ लड़के हाजि
थे, तो प्रतिदिन की उनकी औसतन हाजिरी कितनी थी?

(४) एक स्कूल में पहिली कक्षा में २४, दूसरी में ३०, तीसरी में ३
चौथी में ४५ और पांचवीं में २३ लड़के हैं, तो प्रतिकक्षा में लड़कों
औसत बताओ।

(५) एक शहर की सन् १८७० में लोक संख्या २८७५० और सन् १८८
में ३०००० थी, तो प्रतिवर्ष लोकसंख्या की वृद्धि की औसत निकालो।

(६) एक दिन सुबह से शाम तक प्रतिघंटे का तापमान यंत्र द्वारा लि
गया, वह ६५, ६७, ७०, ७५, ८०, ८३, ८२, ७९, ७७, ७६, ७४, ७२ अं
हुआ, तो उस दिन के तापमान की औसत क्या होगी?

(७) सन् १८९६ में एक पुरुष ने पहिले ६ महीनों में ५९६ रु० ७ आ
३ पा० और दूसरे ६ महीनों में ६८४ रु० ८ आ० ९ पा० खर्च किया, तो प्रति
दिन के खर्च का मध्यम मान क्या होगा?

(८) एक कारखाने के मजदूरों में से १२ मजदूरों को प्रति मजदूर ४
आने और २४ मजदूरों में से हर एक को ३ आने के हिसाब से मजदूरी मिल
तो हर एक मजदूर के प्रतिदिन की मजदूरी का मध्यम मान क्या है?

(९) ५ मनुष्यों के वजन क्रम से ७ स्टोन ८ पौ०, ९ स्टो० ९ पौ०, १० स्टो० ३ पौ०, ११ स्टो० २ पौ०, ११ स्टो० ६-पौ० हैं, तो प्रत्येक मनुष्य के वजन की औसत निकालो । १ स्टो० = १४ पौ० ।

(१०) प्रति कुर्सी ५) रु० के हिसाब से २४; ४ रु० ८ आ० प्रति कुर्सी के हिसाब से १६ और ४) रु० प्रति कुर्सी के हिसाब से २० कुर्सियाँ खरीदी गईं, तो हर एक कुर्सी के मूल्य का मध्यम मान बताओ ।

(११) एक रेलगाड़ी पहिले १० मिनट में २ मील, दूसरे १० मिनट में $\frac{1}{2}$ मी०, तीसरे १० मिनिट में १$\frac{1}{2}$ मील और चौथे १० मिनिट में १ मील के हिसाब से चलती हो, तो मध्यम मान से प्रतिघण्टे की उसकी चाल क्या होगी ?

(१२) ६ पुरुषों के वजन की औसत १० स्टोन है; उनमें से हर एक का स्टो० ७ पौ० के हिसाब से २ पुरुषों का वजन है, तो शेष पुरुषों में हर एक के वजन की औसत क्या होगी ?

(१३) ८ पुरुष ७ स्त्रियां १ लड़का इनकी अवस्थाओं का मध्यम मान ४५ साल है; ८ पुरुषों की अवस्थाओं की औसत ४८ और ७ स्त्रियों की अवस्थाओं की औसत ४६ साल है, तो लड़के की अवस्था क्या है ?

(१४) ५ लड़कों की अवस्थाओं की औसत ८ साल है और बाप के सहित उन लड़कों की अवस्थाओं की औसत ७ साल अधिक है, तो बाप की अवस्था बताओ ।

(१५) एक जहाज के ८ खलासिओं के वजन का मध्यममान १० स्टो० १०$\frac{1}{2}$ पौ० है और कप्तान के सहित उनके वजनों का मध्यममान २ पौ० कम है, तो कप्तान का वजन क्या है ?

(१६) ८ खलासिओं के वजनों की औसत, उनमें से १२ स्टोन वजन का एक खलासी हटाकर उसके स्थान में दूसरा रखने से २ पौण्ड कम होती है, तो नये खलासी का वजन क्या है ?

(१७) एक मिल में कुछ मजदूर प्रति सप्ताह ५००) रु० कमाते हैं; उनके चौगुने मजदूर प्रति सप्ताह ४५०) रु० और दसगुने मजदूर २५०) रु० कमाते हैं, तो उस मिल में प्रतिसप्ताह की मजदूरी की औसत बताओ ।

(१८) एक कक्षा के २० लड़कों की अवस्थाओं की औसत १२ साल है; उस कक्षा में यदि ५ लड़के नये आवें, तो उनकी अवस्थाओं की औसत क्या होगी ? नये लड़कों की अवस्थाओं की औसत ७ साल है।

(१९) एक स्कूल के ७५० लड़कों की अवस्थाओं की औसत १५·४ साल है; उनमें से ५० लड़के स्कूल छोड़ गये, अतः शेष लड़कों की अवस्थाओं की औसत १५·२ हो गई, तो जिन्होंने स्कूल छोड़ा, उन लड़कों के अवस्थाओं का मध्यम मान क्या है ?

(२०) एक स्कूल के १२० लड़कों की अवस्थाओं की औसत १६·५ साल है और १२ अध्यापकों की अवस्थाओं की औसत ३० साल है, तो लड़के और अध्यापक दोनों की अवस्थाओं का मध्यममान क्या होगा ?

(२१) सोम, मंगल और बुध इन दिनों के तापमान की औसत ५३ अंश है और मंगल, बुध और गुरु इन दिनों के तापमान की औसत ५६ अंश है, और गुरुवार का तापमान ६० अंश है, तो सोमवार का तापमान कितना होगा ?

(२२) १ कुर्सी, १ मेज और १ सन्दूक इनके मूल्य का मध्यममान १९) रु० है; १ मेज १ सन्दूक और १ आलमारी इनके मूल्य की औसत २२) रु० है और आलमारी का मूल्य १६) रु० है, तो कुर्सी का मूल्य बताओ।

क्षेत्रफल

(१६५) अंकगणित के नियमों से रेखागणित के कुछ प्रश्नों का उत्तर किस प्रकार निकाला जाता है, इस विषय पर यहां विचार करना है। अतः रेखागणित की कुछ परिभाषाएँ नीचे लिखी जाती हैं:—

(१) जिसके विभाग नहीं किये जा सकते तथा जिसमें लम्बाई, चौड़ाई और मुटाई किंवा उंचाई नहीं पाई जाती उसको **बिन्दु** कहते हैं।

(२) जिसमें केवल लंबाई पाई जाती है चौड़ाई नहीं, उसको **रेखा** कहते हैं।

(३) दो बिन्दुओं के बीच में सब से छोटी रेखा को **सरलरेखा** कहते हैं। यहां रेखा शब्द से सरल रेखा समझना चाहिये।

(४) जिसमें केवल लम्बाई और चौड़ाई पाई जाती है, उसको **धरातल** किसी वस्तु का पृष्ठ भाग कहते हैं।

(५) धरातल में दो रेखाओं के मिलने से जो सूची या कोना बनता है उसको **कोण** कहते हैं। इस कोण पर के अक्षर द्वारा कोण का निर्देश किया जाता है। जैसे, इ∠ यह इ कोण है।

(६) एक रेखा को दूसरी रेखा पर रखने से जो पार्श्ववर्ती दो कोण उत्पन्न होते हैं वे यदि तुल्य होंगे तो उनमें से प्रत्येक को **समकोण** कहते हैं और प्रथम रेखा दूसरी रेखा पर **लम्ब** कही जाती है। समकोण में ९० अंश होते हैं।

(७) जो धरातल दो से अधिक रेखाओं से घिरा रहता है उसको **क्षेत्र** कहते हैं। और इनमें से प्रत्येक रेखा को उस क्षेत्र का **भुज** कहते हैं।

(८) तीन रेखाओं से घिरे हुए क्षेत्र को **त्रिभुजक्षेत्र** कहते हैं। किसी क्षेत्र का निर्देश उसके कोणस्थ अक्षरों से किया जाता है। जैसे,

क

ग अ

यह अ क ग त्रिभुज क्षेत्र है।

(९) दो रेखाएँ परस्पर **समानान्तर** तब कहीं जाती हैं जब वे दोनों ओर चाहे जितनी बढ़ाई जाने पर भी परस्पर मिलती नहीं हैं।

(१०) चार रेखाओं से घिरे हुए क्षेत्र को **चतुर्भुजक्षेत्र** कहते हैं।

अ क

जैसे,

घ ग

यह अ क ग घ चतुर्भुज क्षेत्र है।

(११) जिसके चारो भुज तुल्य होते हैं और जिसके चारो कोण समकोण होते हैं, उसको **वर्गक्षेत्र** कहते हैं।

(१२) जिसके चारो भुज तुल्य नहीं होते हैं, किन्तु संमुख के दो भुज तुल्य और समानान्तर होते हैं, और जिसके चारो कोण समकोण होते हैं, उसको **आयत-क्षेत्र** कहते हैं।

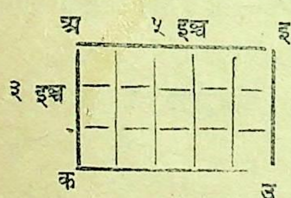
(१३) जिस त्रिभुज में एक समकोण होता है, उसको **जात्यत्रिभुज** कहते हैं। और समकोण के संमुख भुज को **कर्ण** और शेष दो भुजों में से एक को **भुज** और दूसरे को **कोटि** कहते हैं।

(१४) किसी क्षेत्र के सब भुजों के योग को उस क्षेत्र की **परिमिति** कहते हैं।

(१५) जिस क्षेत्र वा पदार्थ के पृष्ठ भाग में जितने स्थान का समावेश होता है उतने स्थान को उस क्षेत्र वा पदार्थ के पृष्ठ भाग का **क्षेत्रफल** कहते हैं। इसका नाप गज, फ़ुट, इञ्च, हाथ, अङ्गुल आदि परिमाणों से किया जाता है।

(१६६) जात्य त्रिभुज के तीन भुजों में से दो भुज मालूम हों, तो तीसरे भुज को जानने का प्रकार :— $\sqrt{\text{भुज}^2 + \text{कोटि}^2}$ = कर्ण, अर्थात् भुज और कोटि के वर्गयोग का मूल कर्ण होता है। तथा, $\sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{भुज}^2}$ = कोटि, अर्थात् कर्ण वर्ग में भुज वर्ग घटाने से शेष का मूल कोटि होती है। एवं $\sqrt{\text{कर्ण}^2 - \text{कोटि}^2}$ = भुज, अर्थात् कर्ण वर्ग में कोटि वर्ग घटाने से शेष का मूल भुज होता है।

(१६७) आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल जानने का प्रकार :—आयत क्षेत्र के पास-पास के दो भुजों में एक भुज उस क्षेत्र की लम्बाई और दूसरा भुज उसकी चौड़ाई होती है। और **लम्बाई × चौड़ाई**=आयतक्षेत्र का क्षेत्रफल होता है। जैसे, किसी आयत क्षेत्र की लम्बाई ५ इञ्च और चौड़ाई ३ इञ्च होगी, तो उसका क्षेत्रफल ५ इञ्च × ३ इञ्च = १५ वर्ग इञ्च होगा। क्योंकि बाईं ओर दी हुई अ इ उ क आयतक्षेत्र की आकृति में अइ भुज उसकी लम्बाई और इउ भुज



उसकी चौड़ाई है। और कल्पना करो कि लम्बाई के एक एक इञ्च के ५ भाग तथा चौड़ाई के एक एक इञ्च के ३ भाग किये गये हैं। तब एक इञ्च लम्बे और एक इञ्च चौड़े ऐसे १५ वर्ग क्षेत्र इस आयतक्षेत्र में बने हैं। जो ५ × ३ अर्थात् लम्बाई × चौड़ाई के गुणनफल के तुल्य हैं। अतः इसका क्षेत्रफल १५ वर्ग इञ्च है, ऐसा कहा जाता है। इससे मालूम होता है कि क्षेत्रफल वर्गात्मक होता है। अब, यदि हम ५ इञ्च के स्थान में ५ गज लम्बाई और ३ इंच के स्थान में ३ गज चौड़ाई माने तो एक गज लम्बे और एक गज चौड़े ऐसे १५ वर्ग क्षेत्र उसमें होंगे। फलतः हम इस क्षेत्रफल को १५ वर्ग गज कहेंगे। और जब, आयत क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई है, तब लम्बाई = आयतक्षेत्रफल ÷ चौड़ाई और चौड़ाई = आयत क्षेत्रफल ÷ लम्बाई, यह स्पष्ट है।

(१६८) जात्यत्रिभुज का क्षेत्रफल जानने की विधिः— ऊपर के आयतक्षेत्र में यदि हम इ कोण से उसके सामने के क कोण तक इ क यह तिरछी कर्ण रेखा करेंगे, तो अ इ क और क उ इ यह दो तुल्य जात्यत्रिभुज उसमें बनेंगे अर्थात्-इस आयतक्षेत्र के क्षेत्रफल का आधा प्रत्येक जात्यत्रिभुज का क्षेत्रफल होगा। और दोनों जात्यत्रिभुजों का इ क यह कर्ण उभयनिष्ठ अर्थात् दोनों त्रिभुजों में एक ही कर्ण होने से आयतक्षेत्र के पास पास के दो भुजों में से एक कोटि और दूसरा भुज कहा जाता है। अतः $\frac{\text{आयतक्षेत्रफल}}{२} = \frac{\text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}}{२} =$

$\frac{\text{अक} \times \text{अइ}}{२} = \frac{\text{भुज} \times \text{कोटि}}{२} =$ जात्यत्रिभुज का क्षेत्रफल। इसलिये जात्यत्रिभुज के भुज कोटि घात का आधा उसका क्षेत्रफल होता है।

(१६९) वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल जानने की विधिः— वर्गक्षेत्र में लंबाई और चौड़ाई समान होती है। अतः लम्बाई और चौड़ाई का घात लम्बाई अथवा चौड़ाई के वर्ग के तुल्य होने से वर्ग क्षेत्र के किसी एक भुज का वर्ग उसका क्षेत्रफल होता है। अतः वर्गक्षेत्रफल का वर्गमूल वर्गक्षेत्र के भुज का मान होगा, यह स्पष्ट है। जैसे, ४ इञ्च लम्बे और ४ इञ्च चौड़े वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल $= ४ \times ४ =$ १६ वर्ग इञ्च। और भुज $= \sqrt{१६} = ४$ इञ्च।

(२००) वर्गक्षेत्र के भुज पर से उसका कर्ण जानने की विधिः— भुज को $\sqrt{२}$ से अर्थात् २ के वर्गमूल से गुण दो गुणनफल वर्गक्षेत्र का कर्ण होगा। जैसे, किसी वर्ग क्षेत्र का भुज १० फीट है, तो उसका कर्ण $= १० \times \sqrt{२} =$ १०×१.४१४२१ इ० $= १४.१४२१$ इ० फीट।

(२०१) वर्ग क्षेत्र के कर्ण पर से उसका भुज जानने की विधिः— कर्ण के आधे को $\sqrt{२}$ से गुण दो, गुणनफल वर्ग क्षेत्र का भुज होगा। जैसे, किसी वर्गक्षेत्र का कर्ण १६ फीट है, तो उसका भुज $= \frac{१६}{२} \times \sqrt{२} = ८ \times$ १.४१४२१ इ० $= ११.३१३६८$ इ० फीट।

(२०२) वर्ग क्षेत्र के कर्ण पर से उसका क्षेत्रफल जानने की विधिः— कर्णवर्ग का आधा वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल होगा। जैसे, किसी वर्गक्षेत्र का कर्ण १२ फीट है, तो उसका क्षेत्रफल $= (१२)^२ \div २ = \frac{१२ \times १२}{२} = ७२$ वर्ग फीट।

(२०३) दीवालों का क्षेत्रफल निकालने की विधिः—किसी कमरे के एक दीवाल का क्षेत्रफल निकालना होगा, तो नीचे की जमीन की लंबाई अथवा चौड़ाई और दीवाल की उंचाई इनका गुणनफल एक दीवाल का क्षेत्रफल होगा। जैसे, किसी कमरे के नीचे की जमीन की लंबाई २० फीट और चौड़ाई १२ फीट और दीवाल की उंचाई ८ फीट है, तो लंबाई के एक दीवाल का क्षेत्रफल = लंबाई × उंचाई = २० × ८ = १६० वर्ग फीट ∴ अतः लंबाई के दोनों दीवालों का क्षेत्रफल = १६० × २ = ३२० वर्ग फी०।

अब चौड़ाई के एक दीवाल का क्षेत्रफल = १२ × ८ = ९६, ∴ चौड़ाई के दोनों दीवालों का क्षेत्रफल = ९६ × २ = १९२ व० फी०, ∴ चारो दीवालों का क्षेत्रफल = ३२० + १९२ = ५१२ व० फी०। **अथवा,** यदि चारो दीवालें एक सरल रेखा में होंगी तो उनका क्षेत्रफल यही होगा, ∴ ४ दीवालों का क्षेत्रफल = परिमिति × उंचाई = (२० + १२ + २० + १२) × ८ = २ (२० + १२) × ८ = ६४ × ८ = ५१२ व० फी०। इससे यह नियम बनता है:—

४ दीवालों का क्षेत्रफल = २ (लम्बाई + चौड़ाई) × उंचाई।

अब इस विषय को अधिक स्पष्ट करने के लिये तथा इसकी व्यावहारिक उपयोगिता दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण नीचे करके दिखलाये गये हैं।

उदाहरण (१) एक खेत की लम्बाई १२१ गज और चौड़ाई ४० गज है तो उसका क्षेत्रफल कितना होगा ?

यहां, क्षेत्रफल=लम्बाई × चौड़ाई=१२१ × ४० = ४८४० वर्गगज=१ एकड़।

उदाहरण (२) एक कमरे की लम्बाई १८ फीट और उसका क्षेत्रफल २१६ वर्ग फीट है तो उसकी चौड़ाई बताओ।

क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई, ∴ २१६ = १८ × चौड़ाई ∴ चौड़ाई = २१६ ÷ १८ = १२ फीट।

उदाहरण (३) किसी आयतक्षेत्र की चौड़ाई से लम्बाई चौगुनी है और उसका क्षेत्रफल २८ वर्ग गज ४ वर्ग फीट है, तो उस क्षेत्र की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

यहां चौड़ाई से लम्बाई चौगुनी है अतः इस आयतक्षेत्र में ४ ऐसे वर्गक्षेत्र बनेंगे जिनमें से प्रत्येक का भुज चौड़ाई के बराबर होगा। अब इन ४ वर्ग क्षेत्रों का

क्षेत्रफल २८ वर्ग गज ४ वर्ग फीट = २५६ वर्ग फीट है, अतः एक वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल = २५६ ÷ ४ = ६४ व० फी०, ∴ $\sqrt{६४}$ = ८ फीट यह इस आयत-क्षेत्र की चौड़ाई हुई, ∴ इसकी लम्बाई = ८ × ४ = ३२ फीट।

उदाहरण (४) एक कमरा २५ फीट लम्बा, १४ फीट चौड़ा और १० फीट ऊंचा है; इसकी दीवालों पर कागज मढवाना है, तो प्रतिवर्ग गज को एक आने के हिसाब से क्या खर्च होगा?

लम्बाई की तरफ की एक दीवाल का क्षेत्रफल = २५ × १० = २५० व० फी०, ∴ २ दीवालों का क्षेत्रफल = २ × २५ × १० = ५०० व० फी० और चौड़ाई की तरफ की एक दीवाल का क्षेत्रफल = १४ × १० = १४० व० फी०, ∴ २ दीवालों का क्षेत्रफल = २ × १४ × १० = २८० व० फी०, ∴ चारो दीवालों का क्षेत्रफल = ५०० + २८० = ७८० व० फी०। अब १ व० ग० में अथवा ९ व० फी० में १ आना खर्च होता है, अतः त्रैराशिक से ९ व० फी० : ७८० व० फी० :: १ आ० : इष्ट खर्च, ∴ इष्ट खर्च = $\frac{७८०}{९}$ आ० = ५ रु० ६ आ० ८ पा०।

अथवा, चारो दीवालों का क्षेत्रफल = २ (लम्बाई + चौड़ाई) × उंचाई = २ (२५ + १४) × १० = ७८० व० फी०, इसके आगे की क्रिया ऊपर की गई है।

उदाहरण (५) एक कमरा २२ फीट लम्बा, १६ फीट चौड़ा और ११ फीट ऊंचा है; इस कमरे में ५ फीट ऊंचा और ३$\frac{१}{२}$ फीट चौड़ा एक दरवाजा है और दो खिड़कियाँ हैं, जिनमें से प्रत्येक की लम्बाई और चौडाई यथाक्रम ३$\frac{१}{२}$ फीट और ३ फीट है, और एक आयत क्षेत्राकार आला है, वह ३ फीट ऊंचा, २$\frac{१}{२}$ फीट चौड़ा और २ फीट गहरा है; उस कमरे को भीतर से रंग लगाना है, तो प्रतिवर्ग गज के लिये दो आने के हिसाब से कितना खर्च होगा?

दरवाजा और खिड़कियों को रंग लगाया नहीं जाता, अतः इनका क्षेत्रफल दीवालों के क्षेत्रफल में से घटाना चाहिये। आले के पृष्ठ भाग ५ हैं, इनमें से एक पृष्ठभाग को अर्थात् ३ × २$\frac{१}{२}$ = $\frac{१५}{२}$ व० फी० को दीवाल के साथ ही रंग लगाया जायगा, शेष पृष्ठ भाग ४ अर्थात् नीचे का और ऊपर का ऐसे २ और अगल बगल के २; इनमें से नीचे के पृष्ठभाग का क्षेत्रफल = २ × $\frac{५}{२}$ = ५ व० फी० और ऊपर के पृष्ठभाग का क्षेत्रफल भी इतना ही होगा; अब एक बगल का क्षेत्रफल = ३ × २ = ६ व० फी०, दूसरी बगल का भी इतना ही क्षेत्रफल होगा।

इस प्रकार आले के ५ पृष्ठभागों में से ४ पृष्ठभागों को दीवालों के अतिरिक्त अधिक रंग लगेगा। इसलिये आले के ४ पृष्ठभागों का क्षेत्रफल दीवालों के क्षेत्रफल में सम्मिलित करना होगा। ∴ ४ दीवालों का क्षेत्रफल = २ (लम्बाई + चौड़ाई) × उंचाई = २ (२२ + १६) × ११ = ८३६ व० फी०; दरवाजे का क्षेत्रफल = ५ × ३$\frac{१}{२}$ = १७$\frac{१}{२}$ व० फी० और खिड़कियों का क्षेत्रफल = २ × (३ × ३$\frac{१}{२}$) = २१ व० फी०, और आले के ४ पृष्ठभागों का क्षेत्रफल = २ × (२$\frac{१}{२}$ × २) + २ × (३ × २) = २२ व० फी०; ∴ रंग लगाये जाने वाले स्थान का क्षेत्रफल = (८३६ − १७$\frac{१}{२}$ − २१ + २२) = ८१९$\frac{१}{२}$ व० फी० = $\frac{१६३९}{२}$ व० फी०। अब एक व० ग० को अथवा ९ व० फी० को २ आना अथवा $\frac{१}{८}$ रु० खर्च आता है, अतः त्रैराशिक से,

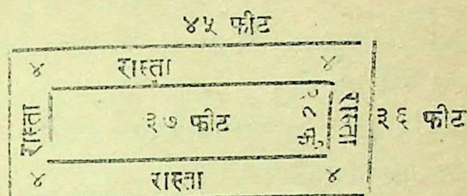
९ व० फी० : $\frac{१६३९}{२}$ व० फी० :: $\frac{१}{८}$ रु० : इष्ट खर्च; अतः इष्ट खर्च = $\frac{१६३९}{१४४}$ रु० = ११ रु० ६ आ० १$\frac{१}{३}$ पा०।

उदाहरण (६) एक कमरे की चौड़ाई १४ फीट है; उसके दीवालों पर भीतर से कागज मढ़वाने में १ व० ग० को १ आने के हिसाब से ५) रु० खर्च होता है, और जमीन पर बिछाने के लिये चटाई बनवाने में १ व० ग० को ४$\frac{१}{२}$ आ० के हिसाब से ७) रु० खर्च होता है तो उस कमरे की लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

यहां, चटाई के खर्च पर से जमीन का क्षेत्रफल निकालना है, अतः ४$\frac{१}{२}$ आ० : ७ × १६ आ० :: १ व० ग० : इष्ट क्षेत्रफल; ∴ जमीन का क्षेत्रफल = $\frac{२२४}{९}$ व० ग० = २२४ व० फी०, अतः कमरे की लम्बाई = कमरे का क्षेत्रफल ÷ चौड़ाई = २२४ ÷ १४ = १६ फी०। अब कागज के खर्च पर से दीवालों का क्षेत्रफल निकालना है, अतः, १ आ० : ५ × १६ आ० :: १ व० ग० : दीवालों का क्षेत्रफल, ∴ दीवालों का क्षेत्रफल = ८० व० ग० = ७२० व० फी० = २ (लम्बाई + चौड़ाई) × उंचाई = ६० × उंचाई, अतः उंचाई = दीवालों का क्षेत्रफल ÷ ६० = ७२० ÷ ६० = १२ फी०।

उदाहरण (७) एक आयतक्षेत्राकार स्थान है, जिसकी लम्बाई ४५ फीट और चौड़ाई ३६ फीट है; इस स्थान के भीतर चारों ओर ४ फीट चौड़ा रास्ता छोड़ कर एक बाग बनाया गया है, तो उस रास्ते का क्षेत्रफल बताओ।

बाग की लंबाई स्थान की लंबाई से ४ + ४ = ८ फीट कम है; क्योंकि बाग के लंबाई के प्रत्येक कोने पर ४ फीट चौड़ा रास्ता है, अतः बाग की लंबाई = ४५ – ८ = ३७ फीट है। इसी तरह बाग की चौड़ाई = ३६ – ८ = २८ फीट है।



∴ रास्ते का क्षेत्रफल = स्थान का क्षेत्रफल – बाग का क्षेत्रफल = ४५ × ३६ व० फीट – ३७ × २८ व० फी० = १६२० व० फी० – १०३६ व० फी० = ५८४ व० फी०।

अथवा, स्थान की लंबाई से सटे हुए प्रत्येक रास्ते का क्षेत्रफल = ४५ × ४ = १८० वर्ग फी०, और स्थान की चौड़ाई से सटे हुए प्रत्येक रास्ते की लंबाई २८ फीट है, क्योंकि स्थान की लंबाई से सटे हुए प्रत्येक रास्ते में ४ फीट शामिल होने से ३६ – ८=२८ फीट उसकी लम्बाई होती है, अतः स्थान की चौड़ाई से सटे हुए प्रत्येक रास्ते का क्षेत्रफल = २८ × ४ = ११२ वर्ग फीट, ∴ चारों ओर के कुल रास्ते का क्षेत्रफल = १८० + १८० + ११२ + ११२ = ५८४ वर्ग फी०।

उदाहरण (८) एक सन्दूक ४ फी० २ इ० लम्बी, ३ फी० २ इ० चौड़ी और २ फी० २ इ० ऊंची है; इस सन्दूक की लकडी के तख्ते की मुटाई १ इ० है, तो सन्दूक के भीतर के पृष्ठ भाग का क्षेत्रफल क्या होगा ?

सन्दूक की लम्बाई बाहर से ४ फी० २ इ० है और तख्ते की मोटाई १ इ० है, अतः सन्दूक की लम्बाई भीतर से नापी जाय तो (१ + १) इ० = २ इ० कम होगी अर्थात् ४ फी० होगी; इसी प्रकार चौड़ाई ३ फी० और ऊंचाई २ फी० होगी। यहां संदूक के भीतर के, अगल बगल के ४, ऊपर का १ और नीचे का १ ऐसे कुल ६ पृष्ठ भागों का क्षेत्रफल निकालना है; सन्दूक के अगल बगल का क्षेत्रफल कमरे की ४ दीवालों के क्षेत्रफल की तरह निकालना चाहिये, यह स्पष्ट है, अतः ४ पृष्ठ भागों का क्षेत्रफल = (४ + ३ + ४ + ३) × २=२८ व० फी०, ऊपर के पृष्ठ भाग का क्षेत्रफल = ४ × ३ = १२ व० फी०; नीचे के पृष्ठभाग का क्षेत्रफल = ४ × ३ = १२ व० फी०।

$\therefore$ ६ पृष्ठभागों का क्षेत्रफल = (२८ + १२ + १२) = ५२ व० फी०।

उदाहरणमाला (४८)

(१) एक जात्यत्रिभुज का भुज २० फीट और कोटि २८ फीट है, तो उसका कर्ण बताओ।

(२) एक जात्यत्रिभुज का कर्ण ८५ फी० और भुज ४० फी० है, तो उसकी कोटि कितनी लम्बी है ?

(३) १२ फी० ऊँचा बाँस जमीन पर खड़ा किया गया, तो उसकी छाया का प्रमाण जमीन पर ५ फी० हुआ, तो छायाग्र से बांस के अग्र तक का अन्तर बताओ।

(४) एक जात्यत्रिभुज का भुज उसकी कोटि से पौन गुना है, तो कोटि से कर्ण कितने गुना है ?

(५) एक जात्यत्रिभुज का कर्ण १२ फी० है और उसका भुज तथा कोटि तुल्य हैं, तो भुज और कोटि की लम्बाई बताओ।

(६) एक जात्यत्रिभुज का कर्ण ३४ इ० और कोटि १६ इ० है, तो उसकी परिमिति कितनी होगी ?

(७) एक जात्यत्रिभुज की कोटि १२ इ० और उसका कर्ण ३७ इ० है, तो उसका क्षेत्रफल कितना होगा ?

(८) एक वर्ग क्षेत्र की परिमिति २८ इ० है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(९) एक जहाज किनारे से सीधे पश्चिम दिशा में ४८ मील पर दिखलाई पड़ा और दूसरा जहाज किनारे से सीधे दक्षिण दिशा में १४ मील पर दिखलाई दिया, तो दोनों जहाजों का अन्तर बताओ।

(१०) एक वर्ग क्षेत्राकार खेत की चारों ओर घूमने में १ घण्टे में ४ मील के हिसाब से २ मिनिट लगते हैं, तो उसके कर्ण की लम्बाई कितनी है ?

(११) एक वर्ग क्षेत्र का कर्ण १०० फी० है, तो उसका भुज कितना लम्बा होगा ?

(१२) जिस आयत क्षेत्र की लम्बाई २४२ गज और चौड़ाई ३२० फी० है, तो उसका क्षेत्रफल बताओ।

(१३) एक आयत क्षेत्र का क्षेत्रफल १२०० व० फी० है और उसकी चौड़ाई ३० फी० है, तो उसकी लम्बाई बताओ।

(१४) ३२ फी० लम्बे और २४ फी० चौड़े कमरे में जाजिम विछाने के लिये कितना खद्दर लगेगा ?

(१५) ३६ फी० ६ इ० लम्बे और १८ फी० चौड़े कमरे में जाजिम विछाने के लिये २३ फी० चौड़ाई का कितना खद्दर लगेगा ?

(१६) जिस आयत क्षेत्र की लम्बाई चौड़ाई से दुगुनी है और उसका क्षेत्रफल १६२ व० ग० है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई बताओ।

(१७) जिस आयत क्षेत्र की लम्बाई चौड़ाई से तिगुनी है और उसका क्षेत्रफल ६४ व० ग० है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई क्या होगी ?

(१८) एक आयत क्षेत्र का कर्ण ८० फी० और उसका भुज १६ गज है, तो उसका क्षेत्रफल कितना होगा ?

(१९) एक वर्गक्षेत्र का क्षेत्रफल १६०० व० फी० है; इसके भुज के समान ही एक आयत क्षेत्र का भुज है, किन्तु उसका क्षेत्रफल १२० व० फी० है, तो उस आयत क्षेत्र का दूसरा भुज बताओ।

(२०) एक सभामण्डप की लम्बाई २० फी० और चौड़ाई १५ फी० है; इस मण्डप में एक वर्गक्षेत्राकार व्यास पीठ है, उसका भुज २ फी० है, तो वहाँ श्रोतृगण के लिये बैठने का स्थान कितना है ?

(२१) एक वर्ग क्षेत्र के इतना ही एक आयत क्षेत्र है; वर्ग क्षेत्र की परिमिति २८ फी० है और आयत क्षेत्र का एक भुज १४ फी० है, तो उसका दूसरा भुज बताओ।

(२२) एक आयत क्षेत्र की परिमिति ५८ फी० और उसकी लम्बाई १५ फी० है, तो उसका क्षेत्रफल कितना होगा ?

(२३) १५ फी० ९ इ० लम्बाई का एक कमरा १२ फी० ऊँचा है; इस कमरे के एक दीवाल को रङ्गीन कागज से मढ़वाना है और बाजार में केवल १३ फी० चौड़ा कागज मिलता है, तो कितना लम्बा कागज लेना चाहिये ?

(२४) एक कमरे की लम्बाई ३० फी०, चौड़ाई २० फी० और उँचाई १३ फी० है, तो उस कमरे के दीवालों का क्षेत्रफल बताओ।

(२५) एक कमरा १९ फी० ११ इ० लम्बा, १५ फी० १ इ० चौड़ा और ९ फी० ऊँचा है; इस कमरे के दीवालों को और पाटन को कागज से मढ़वाना है, तो २ फी० ६ इ० चौड़ा कागज कितना लगेगा ?

(२६) एक कमरा २२ फी० ३ इ० लम्बा, १८ फी० ९ इ० चौड़ा और १० फी० ऊँचा है; इस कमरे में ७ फी० ऊँचा और ४ फी० चौड़ा एक दरवाजा है; इस कमरे के दीवालों को रँग लगवाना हो, तो १ वर्ग फूट को ६ पाई के हिसाब से क्या खर्च होगा ?

(२७) एक कमरे के दीवालों का पृष्ठफल ६६० व० फी० है, उसकी लम्बाई १९ फी० और चौड़ाई १४ फी० हो, तो उसकी उँचाई कितनी होगी ?

(२८) एक सन्दूक बाहर से नापी गई तो उसकी लम्बाई ४ फी०, चौड़ाई २ फी० और उँचाई २$\frac{1}{2}$ फी० मालूम हुई; उस सन्दूक के तख्ते की मोटाई २ इ० हो, तो उसका भीतर का पृष्ठफल क्या होगा ?

(२९) एक कमरा २४ फी० लम्बा, २० फी० चौड़ा और १५ फी० ऊँचा है; उसमें ७ फी० ऊँचा और ५ फी० चौड़ा एक दरवाजा है; ४$\frac{1}{2}$ फी० ऊँची और ३$\frac{1}{2}$ फी० चौड़ी ऐसी दो खिड़कियाँ हैं और ३ फी० ऊँचा, २$\frac{1}{2}$ फी० चौड़ा और २ फी० गहरा ऐसा आयत क्षेत्राकार एक ताखा है, तो उस कमरे में रँग लगाने लायक जगह कितनी है ?

(३०) एक कमरा २४ फी० लम्बा, २० फी० चौड़ा और १० फी० ऊँचा है; उसमें ४ फी० चौड़ा और ६ फी० ऊँचा एक दरवाजा है; ४ फी० ऊँची और ३ फी० चौड़ी ऐसी दो खिड़कियाँ हैं और २ फी० चौड़े, ३ फी० ऊँचे और १$\frac{1}{2}$ फी० गहरे ऐसे आयत क्षेत्राकार दो आले हैं; इस कमरे को रँग लगवाने में एक वर्ग गज को दो आने के हिसाब से क्या खर्च होगा ?

(३१) एक आयतक्षेत्राकार देवालय की लम्बाई ५० हाथ और चौडाई ४० हाथ है; उसके भीतर चारों ओर ४ हाथ चौड़ा प्रदक्षिणा करने का मार्ग है, तो उस मार्ग का क्षेत्रफल बताओ।

(३२) एक कमरा २६ फी० ६ इं० लंबा और १८ फी० ३ इं० चौड़ा है; उसके भीतर चारो ओर २ फूट ६ इं० जगह छोड़ कर शेष स्थान पर चटाई बिछाना है, तो चटाई का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(३३) एक आयतक्षेत्राकार देवालय की लंबाई ८० ग० और चौडाई ५० ग० है, उसके भीतर चारो ओर के २ ग० चौड़े प्रदक्षिणा मार्ग पर फर्श कराने में ६ आने वर्ग फूट के हिसाब से क्या खर्च होगा ?

(३४) एक आयताकार स्थान १२० फी० लंबा और ८० फी० चौड़ा है, उसके बाहर चारों ओर ५ फी० चौड़ा रास्ता है; इतनी ही चौडाई के दो और रास्ते लंबाई और चौड़ाई के ठीक बीच में होकर क्रम से चौड़ाई और लंबाई के समानान्तर होते हुए सीधे अखीर तक चले गये हैं, तब सब रास्तों का मिलकर क्षेत्रफल क्या होगा ?

(३५) २० फी० लंबे और १६ फी० चौड़े आयताकार एक कमरे की चारों ओर के ६ फी० चौडे दालान पर फर्श कराने में १ फू० लंबे और ९ इं० चौड़े ऐसे कितने पत्थर के टुकड़े लगेंगे ?

(३६) ३२० फी० लंबा और २६० फी० चौडा ऐसा एक आयताकार बाग है, उसके ठीक बीच में से लंबाई के समान्तर और ५ फी० चौड़ा एक रास्ता सीधे अखीर तक चला गया है, तो अब बागवानी के लिये शेष कितनी जगह बची ?

(३७) एक आयताकार अमराई की लंबाई और चौड़ाई के ठीक बीच में से होकर क्रम से चौड़ाई और लंबाई के समानान्तर होते हुए ४ फी० चौड़े दो रास्ते सीधे अखीर तक चले गये हैं; अमराई की चौड़ाई ११६ फी० और उसका क्षेत्रफल एक एकड़ हो, तो उन रास्तों का क्षेत्रफल क्या होगा ?

(३८) एक कमरे की लंबाई उसकी चौड़ाई से तिगुनी है, उसमें चटाई बिछाने के लिये १ वर्ग फूट को ६ पाई के हिसाब से २४) रु० खर्च हुए, तो उसकी परिमिति बताओ।

(३९) एक कमरे की लंबाई उसकी चौड़ाई से $\frac{3}{2}$ गुनी है, उसका क्षेत्रफल १७२८ वर्ग फी० है, तो उसकी लंबाई बताओ।

(४०) एक कमरे की लंबाई और चौड़ाई का प्रमाण ५ : ३ है; उसमें फर्श करने में १ व० फूट को ॥=) के हिसाब से १५०) रु० खर्च हुए, तो उसकी लंबाई और चौड़ाई कितनी है ?

(४१) एक कमरे की लंबाई २० फी० और उंचाई १२ फी० है, उसकी दीवालों पर कागज मढ़वाने में १ व० ग० को ३ पेन्स के हिसाब से १ पौ० ४ शि० खर्च हुआ, तो उसकी चौड़ाई बताओ।

(४२) ३६ फी० लंबे कमरे में जाजिम के लिये १ वर्ग फू० को ।) के हिसाब से १८०) रु० खर्च हुए, उसकी दीवालों पर कागज मढ़वाने में १ वर्ग फू० को)॥ के हिसाब से ५२॥) रु० खर्च हुए, तो उसकी उंचाई कितनी है ?

(४३) एक कमरा ४० फी० लंबा और २० फी० चौड़ा है; उसमें ८ फी० ऊंची और ३ फी० चौड़ी ४ खिड़कियाँ हैं, उसके भीतर चूना लगवाने में १ व० ग० को -)॥ के हिसाब से ८ रु० ५ आ० ४ पा० खर्च हुए, तो उसकी उंचाई बताओ।

(४४) एक कमरा ४० फी० लंबा और ३० फी० चौड़ा है; उसमें ८ फी० ऊंचा और ५ फी० चौड़ा एक दरवाजा है; ४ फी० ऊंची और ३ फी० चौड़ी ३ खिड़कियाँ हैं और ३ फी० ऊंचे, २ फी० चौड़े और १$\frac{1}{2}$ फी० गहरे दो ताखें हैं, उसकी दीवालों को रँग लगवाने में १ व० ग० को =) के हिसाब से ४३॥=) खर्च हुए, तो उसकी उंचाई कितनी है ?

(४५) एक कमरे की लंबाई और चौड़ाई का प्रमाण ५ : ४ है, उसमें फर्श करने में १ व० फू० को ।।।) के हिसाब से ५४०) रु० खर्च हुए, और दीवालों को रँग लगवाने में १ व० फू० को ≶) के हिसाब से १६२) रु० खर्च हुए, तो उसकी लंबाई, चौड़ाई और उंचाई कितनी है ?

(४६) एक आयताकार मैदान के चारों कोनों पर समान परिमाण के आयताकार चार हौज हैं; प्रत्येक हौज की चारो ओर चार ही फीट चौड़ा रास्ता है और कोई खुली जगह नहीं है; कुछ रास्ते लंबाई के और कुछ रास्ते चौड़ाई के समानान्तर हैं, तो उन रास्तों की मरम्मत करवाने में १ व० ग० को =) के हिसाब से क्या खर्च होगा ?

(४७) ८० फी० लंबे और ६४ फी० चौड़े आयताकार जमीन के बीच में एक बाग बनाया गया है, उसके चारो ओर समान चौड़ाई का एक रास्ता रखा गया है; यदि बाग की लंबाई ५८ फी० हो, तो उस बाग की और उस रास्ते की चौड़ाई कितनी है ?

(४८) २४$\frac{1}{4}$ फी० लंबे और १७$\frac{1}{2}$ फी० चौड़े एक कमरे के पाटन के चारों ओर २ फी० चौड़े बेलबूटे और बीच में आसमानी रँग लगवाना है, तो प्रति वर्ग ग० १।। आने के हिसाब से बेलबूटे का और प्रति वर्ग गज १ आने के हिसाब से बीच में के आसमानी रंग के लिये क्या खर्च होगा ?

(४९) एक इंच मोटे तख्ते का एक सन्दूक बाहर से १८ इञ्च लंबा, १२ इं० चौड़ा और ९ इ० ऊंचा है, तो उसमें कितने वर्ग फीट तख्ता लगा होगा ?

(५०) एक कमरा २० फीट लंबा, १२ फीट चौड़ा और १५ फीट ऊंचा है और उसकी दीवालों की मोटाई १$\frac{1}{2}$ फीट हैं, किन्तु बाहर की ओर दीवालें ३ फीट

अधिक ऊँची हैं, तो उस कमरे के भीतर की छत पर और दीवालों पर बाहर से और भीतर से सफेदी कराने में १ पाई प्रति वर्ग फूट के हिसाब से क्या खर्च होगा?

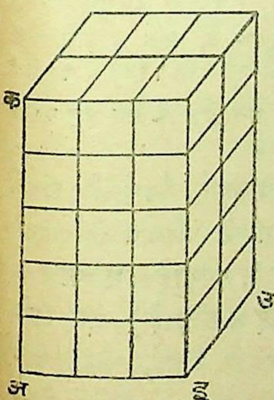
घनफल

(२०४) जिसमें लम्बाई, चौड़ाई और उंचाई पाई जाती है, उसको **पिण्ड** कहते हैं।

(२०५) एक नीचे का, एक ऊपर का और चार अगल बगल के, ऐसे छ तुल्य पृष्ठ भाग जिस पिण्ड के होंगे और जिस पिण्ड में सब समकोण होंगे, उसको **समकोण घनक्षेत्र** कहते हैं।

(२०६) जिस पिण्ड के ६ पृष्ठ भाग होंगे और जिनमें सम्मुख के प्रत्येक दो पृष्ठ भाग सम और समानान्तर होंगे, एवं जिसमें सब सम कोण होंगे, उसको **समकोण समानान्तर आयत घनक्षेत्र** कहते हैं। यहां लम्बाई, चौड़ाई और उंचाई इनमें से कोई दो समान होंगी, तो २ वर्ग क्षेत्राकार और ४ आयत क्षेत्राकार ऐसे ६ उसके पृष्ठ भाग होंगे, यह स्पष्ट है।

(२०७) यहां केवल समकोण घनक्षेत्र, समकोण समानान्तर आयत घनक्षेत्र और घनजात्यत्रिभुज का ही विचार किया गया है। आगे समकोण घनक्षेत्र के लिये केवल घनक्षेत्र शब्द का और समकोण समानान्तर आयत घनक्षेत्र के लिये केवल आयत घनक्षेत्र शब्द का प्रयोग किया गया है। किसी घनक्षेत्र के फल को **घनफल** कहते हैं।



घनफल निकालने की विधिः—

लम्बाई × चौड़ाई × उंचाई = घनफल, जैसे, ५ हाथ ऊँचे, २ हाथ चौड़े और ३ हाथ लम्बे आयत घनक्षेत्र का घनफल जानना हो, तो उक्त नियम से ५ हाथ × २ हाथ × ३ हाथ = ३० घन हाथ, यह उक्त क्षेत्र का घनफल होगा। क्योंकि, बाईं ओर दी हुई क अ इ उ आयत-घनक्षेत्र की आकृति में, अ इ भुज = लंबाई = ३ हाथ, इ उ भुज = चौड़ाई = २ हाथ और अ क भुज = उंचाई = ५ हाथ हैं। अब कल्पना करो

कि अ क उंचाई के एक एक हाथ वाले ५ भाग, इ उ चौड़ाई के एक एक हाथ के २ भाग तथा अ इ लम्बाई के एक एक हाथ के ३ भाग किये गये हैं। अब इस आकृति के तल प्रदेश का क्षेत्रफल = ३ × २ = ६ व० हाथ होने से इतने स्थान में १ हाथ लम्बी, १ हाथ चौड़ी और १ हाथ ऊँची ऐसी ६ ईंटें रखी जा सकेंगी, यह स्पष्ट है। यहां उंचाई=१ हाथ है। अतः इस पहिली तह का घनफल=३ × २ × १=६ घन हाथ होगा। अब यदि इस पहिली तह पर दूसरी तह बिछाई जायगी, तो उसकी उंचाई २ हाथ होने से दोनों तहों का घनफल = ३ × २ × २ = १२ घन हाथ होगा, अर्थात् दोनों तहों में एक घन हाथ परिमाण की १२ ईंटें रखी जा सकेंगी। इसी तरह यदि उस स्थान पर ५ ईंटों की तहें बिछाई जांय, तो उसकी उंचाई ५ हाथ होने से कुल क्षेत्र का घनफल = ३ × २ × ५=३० घन हाथ होगा, अर्थात् १ घन हाथ परिमाण की कुल ३० ईंटें रखी जासकेंगी। इससे उक्त नियम उत्पन्न होता है। अथवा, घनक्षेत्र के किसी पृष्ठ भाग के क्षेत्रफल को उंचाई से गुणने पर भी उस क्षेत्र का घनफल होता है। यहां किसी खात या गड्ढे का घनफल जानना होगा, तो उंचाई के स्थान में गहराई और किसी शहतीर का घनफल जानना होगा, तो उसकी उंचाई के स्थान में उसकी मोटाई समझनी चाहिये।

(२०८) आयत घन क्षेत्र का पृष्ठफल जानने की विधिः—**आयत-घनक्षेत्र का पृष्ठफल = २ { (लम्बाई × चौड़ाई) + (लंबाई × उंचाई) + (चौड़ाई × उंचाई) }** जैसे, जिसकी लंबाई २ फी० २ इञ्च, चौड़ाई १ फु० १ इ० और उंचाई ९ इ० है, ऐसे आयतघनक्षेत्राकार पत्थर का पृष्ठफल जानना हो, तो लंबाई २६ इ०, चौड़ाई १३ इ० और उंचाई ९ इ० है, अतः पृष्ठफल = २ (२६ × १३ + २६ × ९ + १३ × ९) = २ (३३८ + २३४ + ११७) = १३७८ व० इ० = १ वर्ग गज ० व० फी० ८२ व० इ०। यहां घन क्षेत्र के सब पृष्ठ भागों के क्षेत्रफलों के योग को पृष्ठफल कहते हैं।

(२०९) आयतघनक्षेत्र का घनफल और उसकी लंबाई, चौड़ाई और उंचाई इन तीन परिमाणों में से कोई दो परिमाण जानने पर तीसरे परिमाण को जानने की विधिः—**लंबाई=घनफल ÷ (चौड़ाई × उंचाई); चौड़ाई = घनफल ÷ (लंबाई × उंचाई); उंचाई = घनफल ÷ (लंबाई × चौड़ाई);** जैसे, किसी आयतघनक्षेत्र का घनफल १८९ घनफीट है और उसकी लंबाई, चौड़ाई और उंचाई क्रम से ९, ७, ३ फीट हैं, तो इन तीन परिमाणोंमें से कोई दो परिमाण लेकर

तीसरा परिमाण निकालना हो, तो यहां घनफल = १८९, अतः उक्त क्षेत्र की लंबाई = $\frac{१८९}{७\times३}$ = ९ फी०; चौड़ाई = $\frac{१८९}{९\times३}$ = ७ फी०; उंचाई = $\frac{१८९}{९\times७}$ = ३ फी० ।

(२१०) आयतघनक्षेत्र की लंबाई, चौड़ाई और उंचाई मालूम होने पर उसका कर्ण जानने की विधिः—**आयत घनक्षेत्र का कर्ण = √(लंबाई का वर्ग + चौड़ाई का वर्ग + उंचाई का वर्ग)** ; जैसे, किसी आयतघनक्षेत्र की लंबाई, चौड़ाई और उंचाई क्रम से ४, ३, १ फीट है, तो उसके कर्ण का मान क्या होगा ? उक्त क्षेत्र का कर्ण = $\sqrt{(४^२+३^२+१^२)}$ = √२६ = ५.०९९ इत्यादि फीट ।

(२११) घनक्षेत्र का घनफल और पृष्ठ फल जानने की विधिः— घनक्षेत्र का घनफल = उसके किसी एकभुज का घन; घनक्षेत्र का पृष्ठफल = उसके किसी एक भुज के वर्ग का छः गुना । जैसे, जिस घनक्षेत्र के एक भुज का मान ५ फी० है, तो उसका घनफल और पृष्ठफल जानने के लिए उक्त क्षेत्र का घनफल = $५^३$ = १२५ घन फीट, और उक्त क्षेत्र का पृष्ठफल = ६×५^२ = ६ × ५×५ = १५० वर्गफीट ।

(२१२) घनक्षेत्र का पृष्ठफल अथवा घनफल मालूम हो, तो उसका एक भुज जानने की विधिः—घनक्षेत्र का पृष्ठफल मालूम हो, तो उसका भुज = √(पृष्ठफल ÷ ६) और घनक्षेत्र का घनफल मालूम हो, तो उसका भुज = घनफल का घनमूल । जैसे, किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल २९४ व० फी० और घनफल ३४३ घनफीट है, तो उसका भुज जानने के लिये उक्त नियम से, उक्त क्षेत्र का भुज = √(२९४ ÷ ६) = √४९ = ७ फी०, **अथवा** , भुज = $\sqrt[३]{(३४३)} = \sqrt[३]{(७)^३}$ = ७ फी० ।

(२१३) घनक्षेत्र का भुज मालूम हो, तो उसका कर्ण जानने की विधिः— घनक्षेत्र का कर्ण = उसका भुज × √३; जैसे, जिस घनक्षेत्र का भुज ५ फी० है, तो उसका कर्ण जानने के लिये उक्त नियम से, उक्तक्षेत्र का कर्ण = ५ × √३ = ५ × १.७३२ इ० = ८.६६ इ० फीट । **क्योंकि**, किसी घनक्षेत्र का कर्ण, उसके नीचे के पृष्ठभाग के एक कोने से उस कोने के संमुख के ऊपर के पृष्ठभाग के कोने तक जो तिरछी रेखा होती है वह होता है । इस कर्ण की कोटी घनक्षेत्र की उंचाई और इसका भुज नीचे के पृष्ठभाग का कर्ण होता है । और जब भुजवर्ग + कोटिवर्ग = कर्णवर्ग होता है, तब घनक्षेत्र का $कर्ण^२$ = (नीचे के पृष्ठभाग का भुजवर्ग + नीचे के पृष्ठभाग का कोटिवर्ग) + घनक्षेत्र का कोटिवर्ग, ∴ घनक्षेत्र का कर्णवर्ग = लंबाई का वर्ग + चौड़ाई का वर्ग + उंचाई का वर्ग, ∴ घनक्षेत्र का कर्ण = √(लंबाई

का वर्ग + चौड़ाई का वर्ग + ऊंचाई का वर्ग), यहां लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई समान होने से, घनक्षेत्र का कर्ण= $\sqrt{३ \text{ भुज}^२}$ = $\sqrt{३}$×भुज यह उपपन्न होता है।

अब इस विषय की व्यावहारिक उपयोगिता दिखलाने के लिये नीचे कुछ उदाहरण करके दिखलाये गये हैं:—

उदाहरण (१) एक आयत घनक्षेत्राकार लकड़ी के लठ्ठे की लंबाई १० फी०, चौड़ाई ८ फी० और मोटाई ६ फी० है, तो एक घनफूट लकड़ी को १ रु० ४ आ० के हिसाब से उसकी कीमत क्या देनी होगी ?

लकड़ी के लठ्ठे का घनफल = लंबाई × चौड़ाई × ऊंचाई, अतः ल ठ्ठे का घनफल=१० × ८ × ६ घन फी० = ४८० घन फी०। अब १ घनफूट को १ रु० ४ आ० अथवा $\frac{५}{४}$ रु० के हिसाब से कीमत निकालनी है, अतः त्रैराशिक से १ घनफूट : ४८० घनफी० : : $\frac{५}{४}$ रु० : इष्ट रुपया, ∴ इष्ट रुपया = $\frac{४८०}{१}$ × $\frac{५}{४}$= ६०० रु०, यह उत्तर है।

उदाहरण (२) २० मन गल्ला ४० घन फीट जगह में रह सकता हो, तो ४० फीट लंबी, २५ फी० चौड़ी और १० फी० ऊंची कोठरी में कितने गल्ले का समावेश होगा ?

कोठड़ी का घनफल=४० × २५ × १०=१०००० घनफी० और २० मन गल्ला रखने के लिये ४० घनफी० जगह की आवश्यकता होती है, इस पर से त्रैराशिक से, ४० घनफी० : १०००० घनफी० : : २० मन : इष्ट मन, अतः इष्टमन= $\frac{२०×१००००}{४०}$ = ५००० मन, यह उत्तर है।

उदाहरण (३) तांबे का आयत घनक्षेत्राकार एक हौज २ इञ्च मोटा है, वह बाहर से ४ फी० लंबा, ३ फी० चौड़ा और भीतर ५ फी० गहरा है, एक घनफूट जगह में $\frac{२}{३}$ सेर पानी रह सके, तो उस हौज में कितने पानी का समावेश होगा ? और एक घनफूट तांबे का वजन $\frac{३}{४}$ सेर हो, तो उस हौज का वजन क्या होगा ?

हौज की बाहर से लम्बाई नापने से ४ फी० होती है और वह २ इञ्च मोटा है, अतः उसकी भीतर की लंबाई ४ फी० – ४ इ० = ३$\frac{२}{३}$ फी० होगी; इसी तरह उसकी भीतर की चौड़ाई २$\frac{२}{३}$ फी० होगी; लेकिन उसका मुंह खुला होने से उसकी भीतर की गहराई २ इ० ही कम होगी अर्थात् उसकी भीतर से गहराई नापी जाय, तो वह ५ फी० – २ इ०=४$\frac{५}{६}$ फी० होगी। अब इन ३ परिमाणों से उसके भीतर की

खाली जगह का घनफल हम निकाल सकेंगे, अतः खाली जगह का घनफल = $३\frac{२}{३} \times २\frac{२}{३} \times ४\frac{५}{६} = ४७\frac{७}{२७}$ घनफी०, और प्रत्येक घनफूट में $\frac{२}{३}$ सेर पानी रह सकता है, अतः त्रैराशिक से, १ घनफूट : $४७\frac{७}{२७}$ घ० फू० : : $\frac{२}{३}$ सेर : इष्ट सेर, ∴ इष्ट सेर=$४७\frac{७}{२७} \times \frac{२}{३} = \frac{१२७६}{२७} \times \frac{२}{३} = ३१\frac{४१}{८१}$ सेर, अब तांबे के सहित हौज का जो घनफल होगा उसमें से भीतर की खाली जगह का घनफल घटाया जाय, तो अन्तर तांबे के घनफल के इतना ही होगा, अतः तांबे के सहित हौज का घनफल= $४ \times ३ \times ५ = ६०$ घनफी०, ∴ तांबे का घनफल = $(६० - ४७\frac{७}{२७})$ घ० फी० = $१२\frac{२०}{२७}$ घ० फी०, और प्रति घ० फू० तांबे का वजन $\frac{३}{४}$ सेर होता है, अतः त्रैराशिक से, १ घ० फू० : $१२\frac{२०}{२७}$ घ० फी० : : $\frac{३}{४}$ सेर : इष्ट सेर, ∴ इष्ट सेर = $\frac{३४४}{२७} \times \frac{३}{४}$ सेर = $९\frac{५}{९}$ सेर, यह उत्तर है।

उदाहरण (४) एक आयत घनक्षेत्राकार हौज ९ फी० लंबा, ७ फी० चौड़ा और १२ फी० गहरा है; इस हौज में पानी एक आयत घनक्षेत्राकार नल के द्वारा आता है; इस नल का मुँह २ इ० लंबा और $१\frac{१}{२}$ इ० चौड़ा है और पानी के प्रवाह की गति प्रति सेकण्ड ५ फी० होगी, तो वह हौज कितने समय में भर जायगा?

यहां, ५ फी० ऊंचे, २ इ० लंबे और $१\frac{१}{२}$ इ० चौड़े आयत घनक्षेत्राकार लकड़ी के टुकड़े का जो घनफल होगा वही घनफल एक सेकण्ड में हौज में आने वाले पानी का होगा, यह थोड़ा विचार करने पर तुरन्त मालूम हो सकता है, ∴ १ सेकण्ड में आने वाले पानी का घनफल = $५ \times \frac{१}{६} \times \frac{१}{८} = \frac{५}{४८}$ घ० फू०, और हौज का घनफल = $९ \times ७ \times १२$ घ० फी०=७५६ घ० फी०, अतः त्रैराशिक से, $\frac{५}{४८}$ घ० फू० : $\frac{७५६}{१}$ घ० फी० : : १ सेकण्ड : इष्टकाल, अतः इष्टकाल = $\frac{७५६}{१} \times \frac{४८}{५}$ सेकण्ड=२ घंटा ० मि० $५७\frac{३}{५}$ सेकण्ड, यह उत्तर है।

उदाहरण (५) एक घनक्षेत्र का पृष्ठ फल, अर्थात् उसके वर्ग क्षेत्राकार ६ पृष्ठ भागों के क्षेत्रफलों का योग, ९९८४६ वर्ग इञ्च है, तो उसका घनफल बताओ।

६ पृष्ठ भागों के क्षेत्रफलों का योग=९९८४६ व० इं०, ∴ १ पृष्ठ भाग का क्षेत्रफल=९९८४६÷६=१६६४१ व० इ०, इस पर से १ वर्गक्षेत्र का भुज=$\sqrt{१६६४१}$ = १२९ इञ्च = उक्त घनक्षेत्र का १ भुज, अतः लम्बाई, चौड़ाई और उँचाई समान होने से उक्त घनक्षेत्र का घनफल = $(१२९)^३$ घनइञ्च = ४६ घनगज ० घनफूट

५१२ घनइञ्च, यह उत्तर है। (यहाँ १७२८ घनइञ्च = १ घनफूट, २७ घनफीट = १ घनगज होता है)

उदाहरणमाला (४६)

(१) २० फीट लंबे शहतीर की चौड़ाई ३ फी० और उसकी मोटाई २ फीट ६ इञ्च है, तो उसका घन फल बताओ।

(२) एक २ फीट ६ इञ्च उंचाई के बरतन का नीचे का पृष्ठ भाग वर्ग-क्षेत्राकार है, जिसका एक भुज २ फीट है, तो उस बरतन में कितना घन फूट पानी रहेगा ?

(३) एक वर्ग क्षेत्राकार तालाव खोदा जाने पर उसमें से ३३६ घन फीट मिट्टी बाहर निकाली गई, यदि उस तालाव का एक भुज २६ फीट है, तो उसकी गहराई बताओ।

(४) एक गड्ढे में ७०४० घन फीट पानी समा सकता है, यदि उसकी चौड़ाई १० फी० ८ इञ्च और गहराई ५ फीट ६ इञ्च है, तो उसकी लंबाई कितनी होगी ?

(५) एक घन क्षेत्राकार लकड़ी के लट्ठे का वजन ४३२० सेर है; यदि एक घन फूट लकड़ी का वजन २० सेर माना जाय, तो उस लट्ठे का भुज कितना लंबा होगा ?

(६) एक ६ फीट उंचाई के हौज का तल प्रदेश वर्ग क्षेत्राकार है; यदि इस हौज में १९४४ घन फीट पानी रह सकता है, तो उस हौज की लंबाई बताओ।

(७) एक हौज में १० टन पानी रह सकता है; वह ११$\frac{३}{७}$ फीट गहरा है, और उसका पेंदा वर्ग क्षेत्राकार है; यदि एक घन फूट पानी का वजन १००० औंस है, तो उसकी चौड़ाई कितनी है ?

(८) एक हौज का तल आयताकार है; उसकी लंबाई ४५ फीट और चौड़ाई २३ फीट है, और एक ग्यालन पानी २७७$\frac{१}{४}$ घन इञ्च जगह में समा सकता है, तो कितने ग्यालन पानी उसमें से निकाला जाय जिससे उसकी गहराई एक गज नीचे चली जायगी ?

(९) एक बरतन का तल आयताकार है; उसकी (बाहर की) लम्बाई ६ इञ्च, चौड़ाई ४$\frac{१}{२}$ इञ्च और उंचाई ५ इञ्च है; यदि उसकी मोटाई $\frac{३}{४}$ इञ्च है, तो उसमें कितना पानी समा सकेगा ?

(१०) एक दीवाल ६० फी० लम्बी, २० फी० ऊंची और ४० फी० मोटी

है; इसमें २ फी० लम्बी, १$\frac{१}{२}$ फी० चौड़ी और ६ इ० मोटी कितनी ईंटें लगेंगी ?

(११) एक किले की दीवाल २१ फीट लम्बी, १६ फी० ऊंची और १२ फी० मोटी है; इसमें १$\frac{३}{४}$ फी० लम्बी और १$\frac{१}{२}$ फी० चौड़ी ऐसी ६१४४ ईंटें लगीं, तो प्रत्येक ईंट की मोटाई बताओ।

(१२) ४२ गज लम्बी, ८ फी० चौड़ी और ६ इञ्च मोटी एक दीवाल बनाना है; इस दीवाल में ८ फी० ऊंचा और ४ फीट चौड़ा ऐसा एक दरवाजा बनाना है, तो इसमें ८ इञ्च लम्बी, ४ इञ्च चौड़ी और २ इञ्च मोटी ऐसी कितनी ईंटें लगेंगी और उनके लिये प्रतिसैकड़े ७) रु० के हिसाब से कितना खर्च होगा ?

(१३) एक घनक्षेत्र के किसी एक पृष्ठ भाग का कर्ण १५ इञ्च है, तो उसका पृष्ठफल और घनफल बताओ।

(१४) एक घनक्षेत्र का घनफल ४ घनफीट १०८८ घन इञ्च है, तो उसके कर्ण की लम्बाई क्या है ?

(१५) एक घनक्षेत्र का कर्ण २ फीट ६ इ० है, तो उसका पृष्ठ फल और घनफल बताओ।

(१६) ६ फी० ३ इ० लम्बे, २ फी० ६ इ० चौड़े और १ फूट ऊंचे एक आयत घनक्षेत्र का घनफल, जिस घनक्षेत्र के घनफल के तुल्य है, तो ऐसे घनक्षेत्र का एक भुज कितना होगा ?

(१७) ४$\frac{१}{२}$ फी० लम्बे, २$\frac{१}{४}$ फी० चौड़े और १$\frac{१}{३}$ फी० गहरे हौज में जितना पानी समा सकता है उतना ही पानी दूसरे हौज में समा सकता है, जिसका नीचे का पृष्ठ भाग वर्गक्षेत्राकार है और जिसका भुज १ गज है, तो दूसरे हौज की गहराई कितनी है ?

(१८) एक सन्दूक की (बाहर से) लम्बाई ४$\frac{२}{३}$ फी०, चौड़ाई ४$\frac{१}{६}$ फी० और उंचाई २$\frac{१}{२}$ फी० है और उसके तख्ते की मोटाई १ इञ्च है, तो उस सन्दूक का वजन क्या होगा ? जब एक घनफूट लकड़ी का वजन ३६ सेर होता है।

(१९) जिसका प्रत्येक भुज ६ फीट है, ऐसे घनक्षेत्राकार हौज में, जिसके मुंह का एक भुज ४ इञ्च है ऐसे वर्गक्षेत्राकार मुंहवाले नल के द्वारा प्रति मिनट ३० गज के हिसाब से पानी आता है, तो वह हौज भरने में कितना समय लगेगा ?

(२०) एक हौज में एक वर्गक्षेत्राकार मुंहवाले नल के द्वारा प्रतिसेकण्ड

२½ फी० के हिसाब से आधे घण्टे में १८ टन पानी आता है, तो उस नल के मुंह के एक भुज की लम्बाई बताओ

(२१) एक कूआँ ४० फी० लम्बा, ३० फी० चौड़ा और ९० फी० गहरा है, इसमें पानी आने के लिये आयताकार मुंह के दो नल लगे हैं; उनमें से एक का मुंह ४ इञ्च लम्बा और ३ इञ्च चौड़ा है और दूसरे का मुंह ३ इञ्च लम्बा और २½ इञ्च चौड़ा है, पानी के प्रवाह की गति प्रतिसेकण्ड ८ फी० के हिसाब से है, तो वह कूआँ कितने समय में भरेगा ?

प्रतिशत वा प्रतिसैकड़ा

(२१४) प्रति सैकड़ा दो शब्दों से बना है, प्रति + सैकड़ा। प्रति का अर्थ प्रत्येक और सैकड़े का अर्थ सवाँ अर्थात् प्रति सैकड़े का शब्दार्थ प्रत्येक सवाँ या $\frac{1}{100}$ है।

प्रति सैकड़े से हम किसी राशि की हानि, लाभ, घटने बढ़ने इत्यादि की दर मालूम करते हैं। जब हम कहते हैं कि हमारे स्कूल का नतीजा इस वर्ष ८० प्रतिशत वा प्रतिसैकड़ा था, इसका अर्थ है कि हमारे स्कूल से पास हुए लड़कों की संख्या ८० प्रतिशत है, अर्थात् बालकों की संख्या इस हिसाब से है कि, यदि १०० बालक परीक्षा देने वाले हैं, तो पास होने वाले बालकों की संख्या ८० है। यदि हमारे स्कूल में केवल ८० बालक होते, तो पास होने वाले बालकों की संख्या ६४ होती। इसी प्रकार यदि हम कहें कि इस वर्ष २० प्रतिशत बालक पैदा हुए, तो इसका अर्थ यह हुआ कि इस वर्ष पैदा होने वाले बच्चों की संख्या इस हिसाब से है कि, प्रति १०० मनुष्य पीछे २० बच्चे पैदा हुए। एवं यदि हम कहें कि इस दूकानदार को ५० प्रतिशत लाभ हुआ, तो उसके लाभ की दर इस तरह प्रकट की गई है कि यदि उसने १०० रुपया लगाया, तो उसको ५० रुपया लाभ हुआ। जब कि प्रति सैकड़ा एक प्रकार की दर है, अतः हम उस दर से किसी राशि का लाभ, हानि इत्यादि जान सकते हैं।

उदाहरण (१) एक दूकानदार ने ५०० रुपये का माल मोल लिया और उस पर २० प्रतिशत लाभ उठाया, तो उसको क्या लाभ हुआ ?

यहां लाभ की दर = २० प्रतिशत है, अतः यदि उसने १०० रुपये का माल मोल लिया, तो उसको २० रुपया लाभ हुआ, अतः यदि उसने एक रुपये का माल

मोल लिया, तो उसे $\frac{२०}{१००}$ रु० लाभ हुआ, अतः यदि उसने ५०० रुपये का माल मोल लिया तो उसे $\frac{२०\times५००}{१००}$ = १०० रुपया लाभ हुआ।

यदि किसी प्रतिशत को साधारण भिन्न में प्रकट करना हो, तो दर को अभीष्ट भिन्न का अंश और १०० को उसका हर मान कर उसको संक्षिप्त रूप में लिखो।

उदाहरण (२) १० प्रतिशत को साधारण भिन्न में प्रकट करो।

जब १०० पर १० है, तो एक पर $\frac{१०}{१००}=\frac{१}{१०}$ यह अभीष्ट भिन्न है। अथवा, १०० पर १ है, तो १ पर $\frac{१}{१००}$, अतः १० पर $१०\times\frac{१}{१००}=\frac{१}{१०}$।

यदि किसी संख्या का प्रतिशत ज्ञात करना हो, तो प्रतिशत को भिन्न में परिणत करके उससे उस संख्या को गुण देना चाहिये, यदि वह मिश्र संख्या होगी, तो गुणा करने के पहिले उसको साधारण भिन्न का रूप देना चाहिये।

उदाहरण (३) $\frac{४}{५}$ को प्रति सैकड़े में प्रकट करो ?

तुम जानते हो कि १ के ५ भाग करके उसमें से ४ भाग लेना $\frac{४}{५}$ का अर्थ है, अतः १ पर $\frac{४}{५}$, तो १०० पर $\frac{४\times१००}{५}$ = ८० प्रतिशत, इसकी प्रतीति के लिये, ८० प्रति सैकड़े को साधारण भिन्न में परिणत करने पर $\frac{८०}{१००}=\frac{४}{५}$ होता है, अतः ८० प्रतिशत यह अभीष्ट प्रतिशत है। इससे मालूम होता है कि साधारण भिन्न को प्रति सैकड़े में प्रकट करने के लिये उसको १०० से गुण देना चाहिये।

उदाहरण (४) एक गाँव की आबादी ४०० थी, एक वर्ष के बाद ४४० मनुष्य हो गये, तो कितने प्रतिशत मनुष्य बढ़े ?

बढ़ने पर मनुष्यों की संख्या ४४० होने से ४४० − ४०० = ४० मनुष्य और बढ़ गये। अतः,

४०० मनुष्यों पर बढ़े हुए मनुष्य की संख्या = ४०

∴ १ „ „ „ $=\frac{४०}{४००}$

∴ १०० „ „ „ $=\frac{४०\times१००}{४००}$ = १०,

अतः बढ़े हुए मनुष्यों की संख्या १० प्रतिशत है :

उदाहरण माला (५०)

प्रति सैकड़े में प्रकट करो।

(१) $\frac{७}{२५}$; $\frac{५}{२०}$। (२) $\frac{७}{१०}$; $\frac{१}{२५}$। (३) $\frac{९}{२०}$; $\frac{१९}{१००}$। (४) $\frac{१३७}{१०००}$; $\frac{११९}{१२५}$। (५) $\frac{११५}{१६०}$; $\frac{७}{१००}$।

निम्नलिखित को साधारण भिन्न में प्रकट करो।

(६) ३ प्रतिशत (७) ६५ प्रतिशत (८) ४४ प्रतिशत (९) ४५ प्रतिशत (१०) ५५ प्रतिशत

मूल्य बताओ।

(११) ५० रुपये का ५ प्रति सैकड़ा।

(१२) ४०० रुपये का २० प्रति सैकड़ा।

(१३) ६ रुपये ४ आने का ७५ प्रति सैकड़ा।

(१४) ५ पौण्ड १० शिलिङ्ग का १० प्रति सैकड़ा।

(१५) २५ प्रति सैकड़ा की दर से एक दूकानदार को, जिसने १२०० रुपये का माल मोल लिया, कितना लाभ मिला होगा?

(१६) एक दूकानदार को २० प्रतिशत हानि हुई। यदि उसका क्रयमूल्य ५०० रु० १२ आ० ६ पा० हो, तो उसको कितनी हानि हुई?

(१७) मेरी पाठशाला में १० प्रतिशत नेपाली विद्यार्थी हैं, यदि पाठशाला के विद्यार्थियों की संख्या ५०० है, तो नेपाली विद्यार्थियों की संख्या बताओ।

(१८) एक जमींदार सरकार को २५ प्रति सैकड़ा मालगुजारी देता है, यदि उसकी आमदनी ५०० रुपया है, तो उसको कितना रुपया मिलता है?

(१९) कुछ मनुष्यों ने मिलकर ५१६ पौ० १२ शि० ६ पे० से व्यापार करना प्रारम्भ किया, और साल अखीर में उनको ५८० पौ० १८ शि० ९ पे० मिले, तो उनको कितने प्रतिशत लाभ हुआ?

(२०) एक मनुष्य की आय १२५० पौ० ८ शि० ८ पे० है, और वह २५ प्रतिशत बचा लेता है, तो प्रति वर्ष वह कितना व्यय करता है?

साधारण ब्याज

(२१५) कर्ज में लिये हुए द्रव्य के उपयोग के बदले में जो अधिक द्रव्य नियत समय में दिया जाता है उसको **ब्याज** कहते हैं। जो कर्जा लेता है उसको **ऋणी** वा **असामी** कहते हैं। और कर्जा देनेवाले को **महाजन** कहते हैं। कर्ज में दिये हुए द्रव्य को **मूलधन** कहते हैं और मूलधन और ब्याज मिलकर **मिश्रधन** कहा जाता है। कर्जा लेने के दिन से उसको चुकता करने के दिन तक बीच का जो काल होता है उसको **नियतकाल** कहते हैं। ब्याज की प्रतिशत **दर** प्रत्येक सौ रुपये के लिये ठहराया हुआ ब्याज होता है। जैसे, ४ रुपये प्रतिशत का अर्थ प्रत्येक सौ रुपये के लिये ४ रु० ब्याज होता है।

यह ब्याज प्रायः प्रत्येक वर्ष के अन्त में दिया जाता है, इसलिये प्रति वर्ष प्रति सैकड़े के हिसाब से ब्याज निकाला जाता है।

ब्याज के उदाहरण में मूलधन, नियतकाल, ब्याज की दर और मूलधन का नियतकाल का ब्याज ऐसे चार पदार्थ होते हैं। इन चार पदार्थों में से कोई तीन पदार्थों पर से चौथा पदार्थ प्रमाण गणित से लाया जाता है। जैसे, हरि ने कृष्ण से २०० रु० प्रति वर्ष ४ रुपया प्रतिशत ब्याज की दर से कर्जा लिया और वर्ष के अन्त में ब्याज सहित २०८ रु० कृष्ण को दिये, तब हरी कर्जदार कृष्ण महाजन, २०० रु० मूलधन, ४ रु० प्रतिशत ब्याज की दर, १ वर्ष नियतकाल और २०८ रु० मिश्रधन है। इससे नीचे लिखे नियम बनते है:—

मूलधन = मिश्रधन − ब्याज,

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज,

ब्याज = मिश्रधन − मूलधन,

(२१६) ब्याज दो प्रकार का होता है:—**साधारणब्याज और चक्रवृद्धिब्याज।**

अब साधारण ब्याज के कुछ नियम नीचे दिये जाते हैं। अच्छा होगा कि, तुम उनको कंठस्थ कर लो। ऐसे नियम उन्हीं प्रश्नों में प्रयोग किये जाते हैं, जिनमें ब्याज की दर प्रति सैकड़ा होगी:—

(१) मूलधन, प्रति सैकड़ा ब्याज की दर, और समय मालूम हो, तो ब्याज निकालना। $\Big\}$ $\frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{१००}$ = ब्याज।

जैसे, ५ प्रतिशत की दर से ५००) रु० का ५ वर्ष में क्या ब्याज होगा? उक्त नियम से, $\Big\}$ $\frac{५०० \times ५ \times ५}{१००}$ = १२५) रु० ब्याज।

(२) मूलधन, ब्याज और समय मालूम हो, तो प्रति सैकड़े ब्याज की दर निकालना। $\Big\}$ $\frac{(\text{मिश्रधन} - \text{मूलधन}) \times १००}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$ = प्र० सै० ब्याज की दर।

जैसे, कितने प्रतिशत की दर से ५००) रु० का ५ वर्ष में १२५) रु० ब्याज होगा? उक्त नियम से, $\Big\}$ $\frac{१०० \times १२५}{५०० \times ५}$ = ५ प्रतिशत ब्याज की दर।

(३) ब्याज, प्रतिशत ब्याज की दर और समय मालूम हो, तो मूलधन निकालना। $\frac{१०० \times \text{ब्याज}}{\text{दर} \times \text{समय}}$ = मूलधन।

जैसे, कितने मूलधन का ५ प्रतिशत ब्याज की दर से ५ वर्ष में १२५) रु० ब्याज होगा? उक्त नियम से, $\frac{१०० \times १२५}{५ \times ५}$ = ५००) रु० मूलधन।

(४) मिश्रधन, प्रति सैकड़े ब्याज की दर और समय मालूम हो, तो मूलधन निकालना। $\frac{\text{मिश्रधन} \times १००}{१०० + \text{दर} \times \text{समय}}$ = मूलधन।

जैसे, कितने मूलधन का ५ प्रतिशत ब्याज की दर से ५ वर्ष में ६२५) रु० मिश्रधन होगा? उक्त नियम से, $\frac{६२५ \times १००}{१०० + (५ \times ५)}$ = ५००) मूलधन।

(५) मूलधन, ब्याज और प्रति सैकड़े ब्याज की दर मालूम हो, तो समय निकालना। $\frac{१०० \times (\text{मिश्रधन} - \text{मूलधन})}{\text{मूलधन} \times \text{दर}}$ = समय

जैसे, ५००) रु० मूलधन का ५ प्रतिशत ब्याज की दर से १२५) रु० ब्याज कितने समय में होगा? उक्त नियम से, $\frac{१०० \times १२५}{५०० \times ५}$ = ५ वर्ष।

(६) मूलधन, प्रति सैकड़े ब्याज की दर और समय मालूम हो, तो मिश्रधन निकालना। $\frac{\text{मूलधन} \times (१०० + \text{दर} \times \text{समय})}{१००}$ = मिश्रधन।

जैसे, ५००) रु० मूलधन का ५ प्रतिशत ब्याज की दर से ५ वर्ष में कितना मिश्रधन होगा, उक्त नियम से, $\frac{५०० \times (१०० + ५ \times ५)}{१००}$ = ६२५) रु० मिश्रधन।

नोट (१) जब प्रति रुपया अथवा प्रति पौण्ड ब्याज की दर दी होगी,

तब उक्त नियमों में १०० के स्थान में १ को रख कर क्रिया करनी चाहिये। जैसे, प्रति रुपया वा प्रति पौण्ड ब्याज की दर में मिश्रधन = मूलधन × (१ + दर × समय) होता है। इसी तरह सब नियमों में १०० के स्थान में १ को रख कर तदनुसार क्रिया करनी चाहिये।

नोट (२) यदि ब्याज के स्थान में मिश्रधन और मूलधन दिया हो, तो मिश्रधन में से मूलधन घटा कर ब्याज मालूम करो, तब ऊपर के नियम लगाओ। प्रति मास प्रति सैकड़े ब्याज की दर देकर समय वर्ष में दिया होगा, तो वर्षों के महीने बना कर महीनों की संख्या को समय मान कर ऊपर के नियमानुसार क्रिया करो। प्रति मास प्रति रुपया ब्याज की दर देकर समय वर्षों में दिया होगा, तो वर्षों के महीनों को समय मान कर और १०० के स्थान में १ मान कर ऊपर के नियम लगाओ। विविध परिमाणों की संख्याएँ दी होंगी, तो उनको आवश्यक बड़े वा छोटे परिमाणों के अभिन्न वा भिन्न संख्या का रूप देकर ऊपर के नियम लगाओ। और जहाँ विशेष उल्लेख न होगा, वहां प्रतिशत का अर्थ १ वर्ष में १०० रुपये का ब्याज समझना चाहिये।

नीचे ब्याज के कुछ उदाहरण त्रैराशिक, बहुराशिक के नियमों से करके दिखलाये गये हैं। इन प्रकारों की ऊपर के नियमों से तुलना करने पर स्पष्ट मालूम होगा कि, नीचे के उदाहरणों के प्रकार केवल त्रैराशिक के नियमों से उत्पन्न हुए हैं।

उदाहरण (१) प्रति वर्ष ६) रु० प्रतिशत की दर से १००० रु० का ३ वर्ष का ब्याज क्या होगा?

प्रति वर्ष प्रत्येक सौ रुपये का ६ रु० ब्याज है, और इस पर से १०० रु० का ३ वर्ष का ब्याज पहिले निकालना चाहिये, अतः

१ वर्ष : ३ वर्ष : : ६ रु० : इष्ट रु० = १८ रु० ब्याज,

१८ रु०, यह सौ रुपये का ३ वर्ष का ब्याज है, और इस पर से १००० रु० का ३ वर्ष का ब्याज निकालना है, अतः

१०० : १००० : : १८ रु० (ब्याज) : इष्ट रु० (ब्याज)

$\therefore$ इष्ट रु० = $\frac{१०००\times१८}{१००}$ = १८०, $\therefore$ १८० रु० उत्तर।

अथवा, पञ्चराशिक से,

$$\left.\begin{array}{c} १०० \text{ रु० : } १००० \text{ रु०} \\ १ \text{ वर्ष : } ३ \text{ वर्ष} \end{array}\right\} \text{ : : } ६ \text{ रु० (ब्याज) : इष्ट रु० (ब्याज)}$$

$\therefore$ इष्ट रु० $= \frac{१००० \times ३ \times ६}{१००} =$ १८०, $\therefore$ १८० रु० **उत्तर**।

उदाहरण (२) प्रति वर्ष ४ प्रतिशत की दर से २ साल में २४ रु० ब्याज कितने मूलधन का होगा ?

१०० रु० का १ वर्ष का ब्याज ४ रु०, अतः २ वर्ष का ब्याज ८ रु०, इस पर से २ साल में २४ रु० ब्याज जिसका होगा वह मूलघन लाना है, अतः

८ रु० : २४ रु० : : १०० रु० : इष्ट रु० (मूलघन)

$\therefore$ इष्ट रु० $= \frac{२४ \times १००}{८} =$ ३००, $\therefore$ ३०० रु० **उत्तर**।

अथवा, ब्याज कायम रखने से मूलधन और नियतकाल व्यस्त प्रमाण में होते हैं, अतः,

$$\left.\begin{array}{c} २ \text{ वर्ष : } १ \text{ वर्ष} \\ ४ \text{ रु० (ब्याज) : } २४ \text{ रु० (ब्याज)} \end{array}\right\} \text{ : : } १०० \text{ रु० : इष्ट रु० (मूलधन)}$$

$\therefore$ इष्ट रु० $= \frac{१ \times २४ \times १००}{२ \times ४} =$ ३००, $\therefore$ ३०० रु० **उत्तर**।

उदाहरण (३) प्रति वर्ष ६ प्रतिशत की दर से ४ वर्ष में एक मूलधन का ३१ रु० मिश्रधन होता है, तो वह मूलधन बताओ।

१०० रु० का ४ वर्ष का ब्याज २४ रु० होने से १२४ रु० मिश्रधन उसका होगा, अतः त्रैराशिक से,

१२४ रु० : ३१ रु० : : १०० रु० : इष्ट रु० (मूलधन)

$\therefore$ इष्ट रु० $= \frac{३१ \times १००}{१२४} =$ २५, $\therefore$ २५ रु० **उत्तर**।

उदाहरण (४) प्रति वर्ष ४ प्रतिशत की दर से ३६० रु० का ४५ रु० ब्याज कितने साल में होगा ?

ब्याज कायम रखने से मूलधन और नियतकाल व्यस्त प्रमाण में होते हैं, अतः पञ्चराशिक से,

$$\left.\begin{array}{c} ३६० \text{ रु० (मूलधन) : } १०० \text{ रु० (मूलधन)} \\ ४ \text{ रु० (ब्याज) : } ४५ \text{ रु० (ब्याज)} \end{array}\right\} \text{ : : } १ \text{ वर्षः : इष्ट वर्ष,}$$

$\therefore$ इष्ट वर्ष $= \frac{१०० \times ४५ \times १}{४ \times ३६०} = \frac{२५}{८} = ३\frac{१}{८}$ $\therefore$ $३\frac{१}{८}$ वर्ष **उत्तर**।

उदाहरण (५) प्रति वर्ष ८ प्रति शत की दर से ६०० रु० मूलधन का ७२० रु० मिश्रधन कितने वर्ष में होगा ?

७२० रु० − ६०० रु० = १२० रु० ब्याज ६०० रु० का नियतकाल का ब्याज है, और ब्याज को कायम रखने से मूलधन और नियतकाल व्यस्त प्रमाण में होते हैं, अतः पञ्चराशिक से,

६०० रु० (मूलधन) : १०० रु० (मूलधन) } : : १ वर्ष : इष्ट वर्ष,
८ रु० (ब्याज) : १२० रु० (ब्याज) }

∴ इष्ट वर्ष $= \frac{१००\times१२०\times१}{६००\times८} = \frac{५}{२} = २\frac{१}{२}$, ∴ $२\frac{१}{२}$ वर्ष उत्तर।

उदाहरण (६) २६६ रु० १० आ० ८ पा० का ३ वर्ष में ४० रु० ब्याज होता है, तो प्रति वर्ष प्रति शत की दर क्या होगी ?

२६६ रु० १० आ० ८ पा० = $२६६\frac{२}{३}$ रु० = $\frac{८००}{३}$ रु०, इस रकम का ३ वर्ष का ब्याज ४० रु० है, और इस पर से १ वर्ष का सौ रुपये का ब्याज निकालना है, अतः पञ्चराशिक से,

$\frac{८००}{३}$ रु० : १०० रु० } : : ४० रु० : इष्ट रु०,
३ वर्ष : १ वर्ष }

∴ इष्ट रु० $= \frac{१००\times१\times४०\times३}{८००\times३\times} = ५$, ∴ ५ प्रति शत उत्तर।

उदाहरण (७) ६२५ रु० का ६ महीने में ६५० मिश्रधन होता है, तो प्रति वर्ष प्रति शत ब्याज की दर बताओ।

६५० रु० − ६२५ रु० = २५ रु०, यह ६२५ रु० का ६ महीने का ब्याज है, अतः

६२५ रु० : १०० रु० } : : २५ रु० : इष्ट रु०,
६ महीने : १२ महीने }

∴ इष्ट रु० $= \frac{१००\times१२\times२५}{६२५\times६} = ८$, ∴ ८ प्रतिशत उत्तर।

उदाहरण (८) एक महाजन ने एक असामी को ५०० रु० ४ वर्ष के लिये और दूसरे असामी को ६०० रु० ३ वर्ष के लिये एक ही समय एक ही ब्याज की दर से ऋण दिये, दोनों रकमों का ब्याज मिलकर १९० रु० हुआ, तो ब्याज की दर बताओ।

५०० रु० का ४ वर्ष का ब्याज जितना होगा उतना ही ५०० × ४ = २००० रु० का १ वर्ष का ब्याज होगा, इसी तरह ६०० रु० का ३ वर्ष का ब्याज १८०० रु० के एक वर्ष के ब्याज के तुल्य होगा, इससे (२००० रु० + १८०० रु०) = ३८०० रु० का १ वर्ष का ब्याज १९० रु० है, यह स्पष्ट है, अतः

३८०० (मूल धन) : १०० रु० (मूल धन) : : १९० रु० (ब्याज) : इष्ट रु० (ब्याज),

∴ इष्ट रु० $= \frac{१००\times१९०}{३८००} = ५$, ∴ ५ प्रतिशत उत्तर ।

उदाहरणमाला (५१)

(१) प्रतिवर्ष ५ प्रतिशत की दर से २ साल का ५०० रु० का ब्याज निकालो ।

(२) प्रतिवर्ष ४ प्रतिशत की दर से $२\frac{१}{२}$ साल का ९५० रु० का ब्याज क्या होगा ?

(३) प्रतिवर्ष ४ प्रतिशत की दर से २ साल का ७५० पौंड मूलधन का मिश्रधन क्या होगा ?

(४) प्रतिवर्ष $४\frac{१}{२}$ प्रतिशत की दर से ८४० पौं० ५ शि० ८ पे० का ५ वर्ष का ब्याज क्या होगा ?

(५) प्रतिवर्ष $५\frac{१}{२}$ प्रतिशत की दर से $२\frac{१}{२}$ वर्ष में १२५० पौं० १० शि० का मिश्र धन क्या होगा ?

(६) प्रतिवर्ष ३॥) रु० प्रतिशत की दर से ८६१॥।) रु० का १६ महीनों में मिश्रधन क्या होगा ?

(७) ५२० पौं० १३ शि० ४ पे० का $३\frac{१}{२}$ वर्ष में प्रति वर्ष $४\frac{१}{२}$ प्रति शत की दर से ब्याज और मिश्रधन निकालो ।

(८) प्रतिवर्ष $२\frac{३}{४}$ प्रतिशत की दर से $८\frac{४}{५}$ वर्ष का १९८ पौं० १५ शि० का ब्याज क्या होगा ?

(९) ९१४ पौं० १२ शि० ६ पे० का प्रतिवर्ष $२\frac{१}{५}$ प्रतिशत की दर से $२\frac{३}{४}$ वर्ष में मिश्रधन क्या होगा ?

(१०) प्रतिवर्ष ४ प्रति शत की दर से ३ वर्ष में ४६४ पौं० ६ शि० ८ पे० मिश्रधन कितने मूलधन का होगा ?

(११) प्रतिवर्ष $२\frac{१}{२}$ प्रतिशत की दर से २ वर्ष में २५ पौं० ६ शि० ब्याज कितने मूलधन का होगा ?

(१२) ४३३ पौं० ६ शि० ८ पे० मूलधन का २ वर्ष में ४४७ पौं० १५ शि० मिश्रधन होने के लिए प्रति वर्ष प्रतिशत ब्याज की दर बताओ ।

(१३) प्रतिवर्ष ५ प्रतिशत की दर से ४५४ पौं० ३ शि० ४ पे० मूलधन का ५०० पौं० मिश्रधन कितने साल में होगा ?

(१४) प्रतिवर्ष २$\frac{१}{७}$ प्रतिशत की दर से ३$\frac{१}{२}$ वर्ष में ८६ रु० १२ आ० ब्याज कितने मूलधन का होगा ?

(१५) प्रतिवर्ष ४ प्रतिशत की दर से ५३७ पौं० ११ शि० ९$\frac{५}{१३}$ पे० इस मूलधन का दूना मिश्रधन कितने साल में होगा ?

(१६) कितने प्रति शत ब्याज की दर से एक धन का ब्याज २० वर्ष में उसका दूना हो जायगा ?

(१७) २० प्रतिशत ब्याज की दर से कोई धन कितने समय में अपना ३ गुना हो जायगा ?

(१८) किसी मूलधन का प्रतिवर्ष ४ प्रतिशत की दर से ५$\frac{१}{२}$ वर्ष में १२२० पौं० मिश्रधन होता है, तो उसी मूलधन का प्रतिवर्ष ६$\frac{३}{४}$ प्रतिशत की दर से ८ वर्ष में कितना मिश्रधन होगा ?

(१९) जिस दर से १७६ पौं० ५ शि० मूलधन का १९७ पौं० ८ शि० मिश्रधन ४ वर्ष में होता है, उसी दर से १०७५ पौं० १० शि० मूलधन का १५५९ पौं० ९ शि० ६ पे० मिश्रधन कितने वर्ष में होगा ?

(२०) किसी मूलधन का ५ वर्ष में ९६० रु० मिश्रधन होता है, और उसी मूलधन का ८ वर्ष में उसी ब्याज की दर से १०५६ रु० मिश्रधन होता है, तो उस मूलधन को और ब्याज की दर को बताओ।



उत्तरमाला

उदाहरणमाला (१) ८ पृष्ठ से ६ पृष्ठ तक

(१) २, ३ (२) ३, ५, ९ (३) २, ३, ४, ९ (४) २, ३, ४, ५, १० (५) २, ३, ४, ११ (६) २, ११ (७) २, ३, ५, १० (८) २, ४ (९) कोई नहीं (१०) ५ (११) २, ४, ५, ८, १० (१२) ३, ९ (१३) ३, ११ (१४) २, ३ (१५) २, ३, ५, ९, १० (१६) ७, ११, १३ (१७) ११ (१८) ७, १३ (१९) कोई नहीं (२०) ७, ११, १३ (२१) ६७ (२२) २३, २९ (२३) ८९ (२४) १६७ (२५) १७, ५३ (२६) ७, ४३ (२७) २९ × ३ × ७ × २ × २ × २ × १३ (२८) ४१ × ५ × १३ × ११ × ३ (२९) ३१ × १३ × ११ × २ × ३ × ५ (३०) ३ × ३ × ३ × ३ × ५ × २ × १९ (३१) २३ × ११ × १२ × ७ × ३ × २ × २ (३२) २, ३, ६ (३३) १४८, १९६ यह यौगिक संख्याएँ और बाकी की रूढ संख्याएँ हैं (३४) १३ (३५) १०३, ९८३ (३६) ३ से पूरी विभाजित होने से (३८) ९९० (३९) हां, २ (४०) ५ × ५ × ५, ६ × ६, ७ × ७ × ७, ११ × ११, १० × १० × १० × १० × १० ।

उदाहरणमाला (२) १२ पृष्ठ से १३ पृष्ठ तक

(१) २४ (२) ६ (३) १२ (४) ४३७ (५) २५९ (६) ४ (७) ११ (८) ६ (९) ३ (१०) १३ (१२) २७२, ६२८ (१३) १२१ (१४) १२३ लड़के (१५) ६८ पात्र (१६) ४९४, ५१३ (१७) १७ हाथ (१८) १२ सेर की (२०) १० आम ।

उदाहरणमाला (३) १७ पृष्ठ से १८ पृष्ठ तक

(१) ३९६ (२) १८१४९३ (३) १२० (४) १३५० (५) ७२० (६) ४६२ (७) २६७७५० (८) ४४१००० (९) ३६०५४०१८०० (१०) ६६६६६६ (११) २५२ (१२) १०५ (१३) ६२९८५ (१४) २५२३ (१५) ५८ (१६) १२६० (१७) १०८०, १२६०, १४४० (१८) ५८० (१९) ३४५५ (२०) ७२ मिनट (२१) १ घं० ६ मि०

(२२) २१ फु० ६ इं० (२३) १११२ मह०, १७६६६८८ लघु० (२४) २० मिनट (२५) ४२०।

उदाहरणमाला (४) २१ पृष्ठ से २२ पृष्ठ तक

(१) $\frac{३}{४}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{१३}{६०}$, $\frac{१९}{१५३}$, $\frac{२४०}{३५९१}$ (२) छः बटे ग्यारह, अठ्ठारह बटे इकतीस, एक सौ ग्यारह बटे दो सौ पैंतीस, तीन सौ नवासी बटे नौ सौ सतहत्तर, बारह सौ पैंतीस बटे नौ हजार आठ सौ छिहत्तर (३) $\frac{११}{१}$, $\frac{१२}{१}$, $\frac{१३}{१}$, $\frac{१४}{१}$, $\frac{१५}{१}$ (४) $\frac{३}{४}$ (५) ५ रु० ४ आ० (६) २ म० २० से० (७) १ तो० (८) ३ गज (९) ११०० यार्ड (१०) २५ (११) $\frac{३}{८}$ दिन (१२) $\frac{११}{४०}$ मन (१३) $\frac{१९}{३७}$ (१४) ४ रु० १२ आ० (१५) ६ रु० (१६) $\frac{२४}{२३}$, $\frac{११}{२०}$, $\frac{११}{१५}$, $\frac{११}{१०}$, $\frac{११}{५}$, $\frac{११}{४}$, $\frac{११}{३}$, (१७) $\frac{५}{११९}$, $\frac{३०}{८३}$, $\frac{२०}{८३}$, $\frac{१५}{८३}$, $\frac{१२}{८३}$, $\frac{१०}{८३}$।

उदाहरणमाला (५) २४ पृष्ठ

(१) $\frac{१५५}{३१}$, $\frac{१८६}{३१}$, $\frac{३४१}{३१}$, $\frac{५२७}{३१}$ (२) $\frac{६५}{५}$, $\frac{१०४}{८}$, $\frac{१८२}{१४}$, $\frac{२४७}{१९}$ (३) $\frac{६}{१२}$, $\frac{८}{१२}$, $\frac{१०}{१२}$ | $\frac{३०}{६०}$, $\frac{४०}{६०}$, $\frac{५०}{६०}$ | $\frac{३६}{७२}$, $\frac{४८}{७२}$, $\frac{६०}{७२}$ | $\frac{१५०}{३००}$, $\frac{२००}{३००}$, $\frac{२५०}{३००}$ (४) $\frac{३}{७}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{२}{१६}$, $\frac{५}{१८}$ (५) $\frac{५}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{४}{८}$।

उदाहरणमाला (६) २४ पृष्ठ

(१) $\frac{१३}{४}$ (२) $\frac{१९}{३}$ (३) $\frac{२३}{३}$ (४) $\frac{५३}{८}$ (५) $\frac{६९}{७}$ (६) $\frac{३०५}{१८}$ (७) $\frac{४८१}{२३}$ (८) $\frac{९९}{८}$ (९) $\frac{५९}{३}$ (१०) $\frac{१०७}{४}$ (११) $\frac{३०९७}{५६}$ (१२) $\frac{२७२१}{११२}$ (१३) $\frac{४६७२५}{३९५}$ (१४) $\frac{७७६१४}{१९५}$ (१५) $\frac{४४६१०९}{८९५}$

उदाहरणमाला (७) २५ पृष्ठ

(१) ६$\frac{२}{४}$ (२) ६$\frac{१}{८}$ (३) ६$\frac{७}{९}$ (४) ८$\frac{७}{११}$ (५) ७$\frac{११}{१६}$ (६) १७ अभिन्नसंख्या (७) ७$\frac{५९५}{१०००}$ (८) १८$\frac{७}{२९७}$ (९) २७$\frac{७५}{३५७}$ (१०) १९८ अ० सं० (११) १$\frac{३३३}{६५४}$ (१२) २५६$\frac{५}{८९७}$ (१३) ६४$\frac{२०२}{४५७}$ (१४) २३ अ० सं० (१५) ७९$\frac{१६३९}{७९३५}$।

उदाहरणमाला (८) २६ पृष्ठ

(१) $\frac{१}{३}$ (२) $\frac{५}{८}$ (३) $\frac{३}{१०}$ (४) $\frac{३}{४}$ (५) $\frac{४}{१५}$ (६) $\frac{४५}{१४}$ (७) $\frac{४}{७}$ (८) $\frac{५०}{३}$ (९) $\frac{८१}{२}$ (१०) $\frac{७७४५}{२७}$ (११) $\frac{४७}{२०}$ (१२) $\frac{५}{२४}$ (१३) $\frac{१}{१०}$ (१४) १ (१५) २९४।

उदाहरणमाला (९) २८ पृष्ठ

(१) $\frac{१}{७}$ (२) $\frac{२}{५}$ (३) $\frac{८}{१७}$ (४) $\frac{१४}{६५}$ (५) $\frac{२४}{२५}$ (६) $\frac{३२}{६१}$ (७) $\frac{१}{२४}$ (८) $\frac{१५}{१९}$ (९) $\frac{५}{९}$ (१०) $\frac{७}{११}$ (११) $\frac{९}{२२}$ (१२) $\frac{२२}{४३}$ (१३) $\frac{८५१}{९४०}$ (१४) $\frac{११९}{११७}$ (१५) $\frac{२}{७}$ (१६) $\frac{२३}{६७}$ (१७) $\frac{१}{११}$ (१८) $\frac{७५७}{३३३०}$ (१९) $\frac{१}{७}$ (२०) $\frac{१०}{१३}$ (२१) $\frac{१}{२}$ (२२) $\frac{६}{११}$ (२३) $\frac{१}{३}$ (२४) $\frac{३}{४}$ (२५) $\frac{१}{६}$।

उदाहरणमाला (१०) २९ पृष्ठ

(१) $\frac{२१}{३५}$, $\frac{२०}{३५}$ (२) $\frac{४५}{६०}$, $\frac{४८}{६०}$, $\frac{५०}{६०}$ (३) $\frac{९०}{१२६}$, $\frac{९८}{१२६}$, $\frac{९९}{१२६}$ (४) $\frac{२०७९}{३४६५}$, $\frac{२४७५}{३४६५}$, $\frac{१५४०}{३४६५}$, $\frac{६३०}{३४६५}$ (५) $\frac{७५}{२१०}$, $\frac{२०}{२१०}$, $\frac{७८}{२१०}$, $\frac{४०}{२१०}$ (६) $\frac{१२६०}{२१६०}$, $\frac{१२१५}{२१६०}$, $\frac{१४०४}{२१६०}$, $\frac{४००}{२१६०}$ (७) $\frac{५३९}{१३८६}$, $\frac{५६७}{१३८६}$, $\frac{२४२}{१३८६}$, $\frac{३६}{१३८६}$ (८) $\frac{३४०}{२८६०}$, $\frac{६१६}{२८६०}$, $\frac{६२४}{२८६०}$, $\frac{६०५}{२८६०}$ (९) $\frac{२९२५}{१४०४०}$, $\frac{१२१५}{१४०४०}$, $\frac{९६०}{१४०४०}$, $\frac{१५२१}{१४०४०}$, $\frac{१७६८}{१४०४०}$ (१०) $\frac{२००२०}{२१८४०}$, $\frac{२०१६०}{२१८४०}$, $\frac{२०२८०}{२१८४०}$, $\frac{२०३८४}{२१८४०}$ (११) $\frac{११७०}{२३१०}$, $\frac{१३८६}{२३१०}$, $\frac{१४८५}{२३१०}$, $\frac{७७०}{२३१०}$, $\frac{९२४}{२३१०}$, $\frac{९९०}{२३१०}$ (१२) $\frac{१४}{५}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{४०}{५}$ (१३) $\frac{९९४५}{३३१५}$, $\frac{२३८}{३३१५}$, $\frac{२२५}{३३१५}$, $\frac{२०८}{३३१५}$ (१४) $\frac{३६०}{१५१२०}$, $\frac{३३६}{१५१२०}$, $\frac{३१५}{१५१२०}$, $\frac{२८०}{१५१२०}$, $\frac{२७०}{१५१२०}$, $\frac{२४०}{१५१२०}$, $\frac{२१०}{१५१२०}$ (१५) $\frac{१३३१}{२३१०}$, $\frac{३४३}{२३१०}$, $\frac{१२५}{२३१०}$, $\frac{८}{२३१०}$।

उदाहरणमाला (११) ३२ पृष्ठ

(१) $\frac{८}{९}$ बड़ी, $\frac{४}{५}$ छोटी (२) $\frac{६}{७}$ बड़ी, $\frac{३}{१४}$ छोटी (३) $\frac{१}{२}$ बड़ी, $\frac{१}{३}$ छोटी (४) $\frac{३}{७}$ बड़ी, $\frac{२}{५}$ छोटी (५) $\frac{३}{७}$ बड़ी, $\frac{३}{४}$ का $\frac{८}{१५}$ छोटी (६) $२\frac{१}{३}$ बड़ी, $२\frac{१}{२}$ का $\frac{४}{५}$ छोटी (७) $\frac{१२}{१३}$ बड़ी, $\frac{३}{३६}$ छोटी (८) $\frac{१}{५}$, $\frac{३}{१४}$, $\frac{८}{३७}$, $\frac{५}{२३}$, $\frac{२}{९}$ उत्तरोत्तर बड़ी (९) $\frac{१७}{४०}$, $\frac{११}{३०}$, $\frac{२५}{५६}$, $\frac{१९}{४२}$, $\frac{१६}{३५}$, $\frac{२३}{४८}$ (१०) $\frac{५}{१२}$ और $\frac{१२}{२९}$ यह $\frac{३१}{७५}$ से बड़ी और बाकी सब छोटी हैं (११) $\frac{९}{१६}$ शीशी पीने वाला बालक।

उदाहरणमाला (१२) ३५ पृष्ठ

(१) $\frac{७}{५}$ (२) $१\frac{५}{१२}$ (३) $\frac{५}{१६}$ (४) $८\frac{१}{६}$ (५) $८\frac{१५}{२८}$ (६) $\frac{७१}{१०५}$ (७) $२\frac{८३}{१२०}$ (८) १ (९) $\frac{२}{३}$ (१०) $\frac{५}{९}$ (११) $२\frac{९}{११}$ (१२) $\frac{४}{५}$ (१३) $\frac{९}{१३}$ (१४) $३\frac{४}{५}$ (१५) $१८\frac{११}{२०}$ (१६) $६०\frac{१४१७}{२५२०}$ (१७) $\frac{२४७}{२५६}$ (१८) $३४\frac{१२}{२५}$ (१९) ७ पौं० १९ शि० $\frac{९}{१६}$ पे० (२०) $\frac{३}{४}$ (२१) $\frac{१९}{२८}$।

उदाहरणमाला (१३) ३७ पृष्ठ से ३८ पृष्ठ तक

(१) $\frac{१}{३}$ (२) $\frac{१}{४}$ (३) $\frac{२}{११७}$ (४) $\frac{१}{१५}$ (५) $\frac{४}{४५}$ (६) १$\frac{१०९}{२२८}$ (७) ३$\frac{७}{१०}$ (८) $\frac{१८१}{४०६}$ (९) ६$\frac{११}{२०}$ (१०) ११$\frac{२}{१५}$ (११) ७$\frac{१०१}{११५}$ (१२) ८$\frac{५७७}{१२३६}$ (१३) १६० (१४) १४$\frac{१}{४५}$ (१५) ९$\frac{६४}{८१}$ (१६) १०$\frac{२२३}{२७३}$ (१७) ९$\frac{५५}{५६}$ (१८) ६$\frac{१९}{२१}$ (१९) ९$\frac{९}{१९}$ (२०) १०$\frac{१}{२१}$ (२१) $\frac{१}{८}$ (२२) $\frac{१}{९०}$ (२३) $\frac{१}{११७}$ (२४) $\frac{२}{१३}$ (२५) ४ (२६) ४ रु० ४ आ० ३$\frac{७}{८}$ पा० (२७) ५ रु० १५ आ० $\frac{४}{७}$ पा० (२८) १० पौं० ९ शि० ५$\frac{७}{१६}$ पे० (२९) ३६ (३०) $\frac{७}{३६}$ ।

उदाहरणमाला (१४) ४० पृष्ठ से ४१ पृष्ठ तक

(१) $\frac{२}{५}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{५}$, १$\frac{१}{३}$ (२) ४$\frac{११}{१५}$, ५$\frac{११}{१२}$, ९$\frac{७}{१५}$, १०$\frac{१३}{२०}$ (३) १४$\frac{३}{४}$, १९$\frac{२}{३}$, २९$\frac{१}{२}$, ३९$\frac{१}{३}$ (४) १०$\frac{१}{५}$, २३$\frac{४}{५}$, ५१, ६१ (५) ४$\frac{३}{८}$, १३$\frac{१}{८}$, १९$\frac{१}{१६}$, ६१$\frac{१}{४}$ (६) १३$\frac{१}{३}$ (७) २८६$\frac{१}{१०}$ (८) २१९०$\frac{२}{५}$ (९) ८९९$\frac{९१}{१००}$ (१०) ६३९९$\frac{७१}{७३}$ (११) $\frac{१}{१२}$ (१२) $\frac{५}{८}$ (१३) १$\frac{१}{२}$ (१४) ३$\frac{२}{३}$ (१५) ८ (१६) ७९$\frac{५}{८}$ (१७) $\frac{२५}{१२१}$ (१८) $\frac{१}{१२}$ (१९) $\frac{५}{२४}$ (२०) २८ (२१) २७$\frac{३}{१०}$ मील (२२) $\frac{११}{१५}$ (२३) $\frac{२}{९}$ (२४) ३२६ रु० ।

उदाहरणमाला (१५) ४३ पृष्ठ

(१) ९$\frac{१}{३}$ (२) २४ (३) १$\frac{१}{९}$ (४) ६$\frac{१६}{३१}$ (५) $\frac{१६०}{१८९}$ (६) $\frac{१९७३५}{२१६७९}$ (७) २१$\frac{१}{५}$ (८) $\frac{६}{७}$ (९) ५३७ (१०) ३$\frac{११}{१५}$ (११) १$\frac{१९}{४५}$ (१२) २$\frac{१}{१०}$ (१३) $\frac{१}{२}$ (१४) १$\frac{१}{३०}$ (१५) $\frac{१६}{२१}$ (१६) ४$\frac{१}{१४}$ (१७) १५ (१८) ६ (१९) $\frac{५}{१४}$ (२०) ९ पुस्तक (२१) १७ घोडे (२२) ५ घं० २० मि० (२३) २४०० चक्कर (२४) $\frac{३}{४}$ (२५) ९$\frac{१}{३}$ (२६) $\frac{५}{२४}$ (२७) $\frac{१३}{२०}$ (२८) १$\frac{१}{२}$ (२९) $\frac{३}{४}$ (३०) $\frac{१}{३०}$ (३१) २$\frac{१}{४}$ (३२) $\frac{२}{१३}$ (३३) १$\frac{९}{६११}$ (३४) ५$\frac{१७}{२२२}$ (३५) १ ।

उदाहरणमाला (१६) ४४ पृष्ठ

(१) $\frac{२}{३५}$ (२) $\frac{१}{४४}$ (३) $\frac{१}{१२६}$ (४) $\frac{१}{१२०}$ (५) $\frac{१}{१२}$ (६) १$\frac{१}{२}$ (७) $\frac{१}{१५०}$ (८) $\frac{१}{४२०}$ (९) $\frac{७}{८५८०}$ (१०) $\frac{११}{२४}$ सेर की ।

उदाहरणमाला (१७) ४५ पृष्ठ

(१) $१४\frac{२}{५}$ (२) $५\frac{५}{७}$ (३) १४० (४) ३० (५) १२६ (६) २४ (७) $१८\frac{६}{७}$ (८) $१४६\frac{२}{३}$ (९) $४४५८\frac{६}{१३}$ ।

उदाहरणमाला (१८) ५० पृष्ठ

(१) ० (२) $\frac{३}{१६}$ (३) $२७\frac{३}{१०}$ (४) $२\frac{७}{१२}$ (५) $१\frac{५}{८}$ (६) $३\frac{१७}{२४}$ (७) १६ (८) $३\frac{१६}{२१}$ (९) $५\frac{५}{१३२८}$ (१०) $३\frac{२५}{७२}$ (११) $३\frac{१३}{४०}$ (१२) १ (१३) $१६\frac{८}{३१}$ (१४) $\frac{१}{२}$ (१५) ७ ।

उदाहरणमाला (१९) ५३ पृष्ठ

(१) $\frac{४}{११}$ (२) $\frac{१३}{३०}$ (३) १० (४) $३\frac{३९}{४१}$ (५) २ (६) $\frac{५}{१३}$ (७) $\frac{१९३}{२०१}$ (८) $\frac{२५}{२०८}$ (९) $\frac{१}{१६}$ (१०) $१\frac{२}{३}$ (११) $१\frac{६४}{२२९}$ (१२) $२\frac{२३}{९७}$ ।

उदाहरणमाला (२०) ५५ पृष्ठ से ५६ पृष्ठ तक

(१) $\frac{३}{८}$ (२) $\frac{१८}{२५}$ (३) १ (४) $\frac{१४२४}{३७२५}$ (५) $१\frac{४}{२३१}$ (६) $१\frac{७३}{९०}$ (७) $९\frac{३}{८}$ (८) $१३\frac{२}{३}$ (९) $२\frac{२३}{२६}$ (१०) $\frac{१७}{२०}$ (११) $\frac{११२२}{११४१}$ (१२) $५\frac{२८९}{७६३}$ (१३) $\frac{१४}{६५}$ (१४) $११\frac{५०}{१११}$ (१५) ६ (१६) $६\frac{११}{२४}$ (१७) $३७\frac{४९}{१५०}$ (१८) $१\frac{९}{१०}$ (१९) $\frac{४१}{१८०}$ (२०) $९\frac{९}{१४}$ (२१) $३\frac{३}{१०}$ ।

उदाहरणमाला (२१) ५८ पृष्ठ से ५९ पृष्ठ तक

(१) १२ आना (२) ७ पौं० १६ शि० (३) ५ मा० ५ र० (४) ५ घं० ४६ मि० ४० से० (५) १ प्रहर $२\frac{३}{४}$ घटी (६) ५७ मिनट (७) १०५ वर्ग या० ७ वर्ग फू० १२६ वर्ग इ० (८) ३० वर्ग पोल (९) १६ शि० ८ पे० (१०) २५ पौंड (११) १५ सेर (१२) १०० यार्ड (१३) $५\frac{१}{३}$ अंगुल (१४) ११ रु० ९ आ० (१५) २५ रु० ९ पा० (१६) ६९ रु० १ आ० २ पैसा (१७) २३ पौं० १० शि० ९ पे० (१८) २१ पौं० १९ शि० $६\frac{३}{४}$ पे० (१९) ९ म० १ से० १३ छ० (२०) ७९ वर्ष २५४ दि० १० घं० (२१) ८९ ग० १ फू० ९ इ० (२२) ९० तो० ३ मा० २ र० (२३) $१\frac{१}{३}$ आना (२४) १२५ रु० (२५) २१ मील १२५ गज ।

उदाहरणमाला (२२) ६१ पृष्ठ

(१) $\frac{१}{२४}$ रु० (२) $\frac{७}{८०}$ पौं० (३) $\frac{१}{१६}$ तो० (४) $\frac{१}{३२००}$ दिन (५) $\frac{१}{६}$ दिन (६) $\frac{१}{११}$ मील (७) $\frac{१}{३}$ रु० (८) $\frac{२}{३}$ पौं० (९) ४$\frac{३}{१०}$ मन (१०) $\frac{७}{२४}$ तो० (११) $\frac{२२}{३}$ (१२) $\frac{१०}{३}$ (१३) $\frac{९}{१०}$ (१४) $\frac{३१}{२०२}$ (१५) $\frac{५}{३४}$ (१६) $\frac{३०}{४९७}$ (१७) $\frac{३२}{३}$ (१८) $\frac{१}{४०}$ (१९) $\frac{८}{११}$ (२०) $\frac{१}{४}$ (२१) $\frac{६४}{१८९}$ (२२) $\frac{१}{२}$ (२३) $\frac{८३}{३१}$ (२४) $\frac{३५}{५२}$ (२५) $\frac{९३}{१५५}$ ।

विविध उदाहरणमाला (२३) ६४ पृष्ठ से ६८ पृष्ठ तक

(१) २ (२) २$\frac{१}{२}$ (३) ४$\frac{१}{६}$ (४) १$\frac{२७}{८८}$ (५) $\frac{१}{२५}$ (६) ५ (७) ९ (८) $\frac{१३}{४८}$ (९) १ (१०) $\frac{७}{४०}$, $\frac{९}{४०}$, $\frac{११}{४०}$, $\frac{१३}{४०}$ (११) ३६ (१२) $\frac{१०}{२०}$ (१३) १$\frac{४१}{५१}$ (१४) $\frac{३}{८}$ (१५) $\frac{११}{९}$, ४२$\frac{७}{९}$ (१६) १५$\frac{४३}{६०}$, १०$\frac{५३}{६०}$ (१७) मजदूर $\frac{१}{२४}$ इतना अधिक काम करता है, $\frac{५}{२४}$ दोनों का एक दिन का काम (१८) ४१५८ रु० (१९) १४ रु०, ९१ रु० (२०) ४९ रु० ३ आ० ८ पा० (२१) ४८७ रु० ३ आ० २ पा० (२२) १४४ रु० (२३) ११० (२४) २५ बीघा (२५) ७५००० रु० (२६) ३० फीट (२७) $\frac{११}{३०}$ (२८) २४० (२९) $\frac{३}{८०}$ (३०) १० पा० (३१) ४५६ पा० ; ४०८८$\frac{५}{९}$ छटां० (३२) ४०१ तो० ८ मा० (३४) ५$\frac{१}{६}$ (३५) ७६ ७$\frac{१९}{३२}$ रु० (३३) ७ रु० ७ आ० ३ पा० (४१) २ पौं० १० शि० (३८) १५ (३९) ८४ (४०) ९९९ (४४) १५६८० रु० (४२) ३६९३ पौं० १५ शि० (४३) $\frac{७६५}{३४५६७}$ । (४७) ६०० पेड (४५) १६ रु० १३ आ० २ पा० (४६) १५ फल (४८) १।।) रु० (४९) ३६ रु० (५०) ५६४ यात्री ।

उदाहरणमाला (२४) ७१ पृष्ठ

(१) ·९; ·१७; ८·३; १·०३; ·०१; ·०२९; ७२·८१; ७७७·१ ।

(२) ·७; ·०१५; ·०००८; १२·०४००६; १००·५०२ ।

(३) ४७०, ४७०००, ४·७, ·०४७; ७, ७००, ·०७; ·०००७; ·३, ३०, ·००३, ·००००३; ३६, ३६००, ·३६, ·००३६; ६०·१, ६०१०, ·६०१, ·००६०१; २०·०७, २००७, ·२००७, ·००२००७; ७००००,

७००००००, ७००, ७; १२८३, १२८३००, १२·८३, ·१२८३; २३४·९, २३४९०, २·३४९, ·०२३४९; ·००१, ·१, ·००००१, ·०००००००१।
(४) ·३ (५) ·००१।

उदाहरणमाला (२५) ७२ पृष्ठ

(१) $\frac{१}{५}$; $\frac{१}{४०}$; $\frac{३६}{१२५}$; $\frac{२१}{४००}$; $\frac{३}{८००}$; ५$\frac{१}{४}$; ७$\frac{९}{४०}$; ७२$\frac{१}{४}$; $\frac{२८९}{४००}$; $\frac{२८९}{४००००००}$।
(२) ·१; ·१७; ·०५२३; २०·३; ५०·०३; ·०५००३; ५०२·३४५६।
(३) ·०५; ·५; ४००; २३४५; २३४५००; २३४५००।
(४) २७·५२; ·३४६५; ·४५६७; ३·४५६; ·०७४३४; ·०००७३४५।
(५) २०, ३, $\frac{७}{१०}$, $\frac{२}{१००}$, $\frac{३}{१०००}$, $\frac{४}{१०००००}$, $\frac{५}{१००००००}$, $\frac{६}{१०००००००}$, $\frac{७}{१०००००००००}$।

उदाहरणमाला (२६) ७३ पृष्ठ

(१) ४७·०९५९५ (२) ५६२३·७०४२७ (३) ६·५२९५२२
(४) ११०·८१९२९९५ (५) ३८५·२६०८६३ (६) ३९५·२०६२
(७) ·९१३४७।

उदाहरणमाला (२७) ७४ पृष्ठ

(१) ४·७८९; १·५४३; ·००१। (२) ४८·२२९३; ·०६०७; २·००१।
(३) ७२·२०१६; ३·४४३२९; २३·७५७६।
(४) ·०४१०४; ४२·४०९९६४३। (५) ४·९९८५५३; ·४९७४९५।
(६) ·६७५५; ४·०९१; ·६९४९९२७। (७) ·५८७८; ·१; ४·२९७।
(८) ६९६·१६२। (९) १९९९·२५२१८। (१०) १२८·४७१।
(११) १·३४५७।

उदाहरणमाला (२८) ७५ पृष्ठ से ७६ पृष्ठ तक.

(१) ३५·२५; १८·९३२६, ·१००३४५; १५९·६।
(२) ·१५९६; १५·९६; ·०००१५९६; ५०।
(३) ३७·२८१२; ·१२३७६; १९१·६४१४५।
(४) १२·०८९८०४३२; ·९; २५।
(५) १४९७७·९२६२५४२५; ·००००४६५१३१। (६) ·०१५६२५।
(७) १·३३१ (८) ·०००००००१२५ (९) २४०१ (१०) ३८·९३७५
(११) ९८·२६०२ (१२) १४३·५०७७०२।

उदाहरणमाला (२९) ७९ पृष्ठ से ८० पृष्ठ तक.

(१) १२; १४४००; .००८४ । (२) १२७००; ४३.०७८; १०० ।
(३) २.१; ९१.८; ६२५ । (४) .००००३; .३७४; .००१९२ ।
(५) १००००००० ; २५०; १६.२५ । (६) .३२; .२३२८१२५ ।
(७) १०००; .२१४ ।
(८) १२८.१८५१८....; ५.२०८३३.....; ३३.३३३३३.... ।
(९) .०८३६६....; .०२३२०.... ।
(१०) .००६५०....; ३३०५७८५१.२३९६६.... । (११) ९ (१२) ८
(१३) .२७ (१४) .२५; .३७५; .०९३७५; .२८; .९६८७५; .२५६;
.१९५३१२५; १.६११३२८१२५; .१७६५१३६७१८७५ ।
(१५) ३.०९७६५६२५; ५.५८५९३७५; १.४३७५; ३.०९३७५; ९.८७५;
३.२८ ।
(१६) .१६६६६....; .२८५७१....; .२७२७२....; .६९२३०....;
१.४४४४४....; ७.१८१८१....; ८.३३३३३....; १०.३४४८२.... ।
(१७) .०२१६ (१८) .११२५ (१९) ३.१३५ (२०) .२

उदाहरणमाला (३०) ८० पृष्ठ

(१) .२५; १०८.७५ (२) .०३; ७२.१२ (३) .००४; .४ (४) .२४; ६
(५) .००५; १.६ (६) .०००१; .०८ (७) .०६; ११७५४.६
(८) .०२५; १.५ ।

उदाहरणमाला (३१) ८५ पृष्ठ से ८८ पृष्ठ तक.

(१) .४९६९ (२) १२०५.७१ (३) ४६.११ (४) २००० (५) ७.३६२
(६) २.६६५८ (७) १.३६ (८) २९

उदाहरमाला (३२) ८९ पृष्ठ से ९० पृष्ठ तक

(१) .$\dot{६}$; $\dot{१}$३$\dot{५}$, .$\dot{०}$$\dot{१}$; .$\dot{५}२३८०\dot{९}$; ८.$\dot{२}२\dot{५}$ । (२) .$\dot{०}$७३१$\dot{६}$; .७९३$\dot{५}$;
.०१२$\dot{३}$$\dot{६}$; २४.१३$\dot{६}१४२८\dot{५}$; ७.१०$\dot{६}$ । (३) $\dot{२}$४.०$\dot{४}$; ४.०६९$\dot{४}$; ३.११$\dot{५}$;
२५७.$\dot{०}$१$\dot{८}$ । (४) $\frac{२}{३}$; $\frac{१}{१८}$; $\frac{१६३}{४९५}$; $\frac{११५}{३३३}$; $\frac{१३१}{१८०}$ । (५) ७$\frac{१३}{९९९}$; $\frac{२}{८२५}$;
$\frac{७९}{३००}$; ३$\frac{८}{३३३}$; १$\frac{३१}{९८०}$ । (६) ७५$\frac{४५२}{९९९}$; २३४$\frac{१२७१}{४९५०}$; २$\frac{५८१६८९}{१११११०००}$;
$\frac{२८९}{४९५}$; $\frac{१७}{१३७५}$ । (७) $\frac{१०४८६०८७}{१९९९८०००}$; २$\frac{११}{१४}$; ८$\frac{१}{४८}$; ३$\frac{९}{१४}$; $\frac{५१४६७}{१३४६८०}$ ।

(८) $\frac{७५३७७}{९९९}$; $\frac{८५२७४०}{९९९}$; $\frac{१५४२२}{३३३}$। (९) $\frac{१२९}{५५}$; $\frac{३४६९१११११}{१९९९९९८}$; $\frac{१८२८३३०७}{२२२०}$। (१०) $\frac{२३६१२०८७}{४१६२५}$; $\frac{११५९५७१}{४९५०}$; $\frac{५५७७७७८}{२४९७५}$।

उदाहरणमाला (३३) ९३ पृष्ठ से ९४ पृष्ठ तक

(१) ७·१५२३ । (२) ४३०·८२१२४६ । (३) ७·२९३९३९ अर्थात् ७·२९̇३̇; ३·६१२७७६; ·०२५४५५ । (४) ९२·९९६२९६ अर्थात् ९९·९९̇६२̇। (५) ·०००२१ । (६) २४८·१२६२६२ अर्थात् २४८·१२̇६̇ । (७) २९·४०५५५ इत्यादि अर्थात् २९·४०५̇ । (८) ६०·०३०६९८ । (९) ३·४७७७५४९ । (१०) ४४०·२५५७४६ । (११) ४·२६७६७६; ४·४२७२७२; २·६७२०२० । (१२) १३·२̇; ·२७̇; ३६३·५७̇४०̇ । (१३) २५·२१३̇; ३००; ·७२६५̇१८̇ । (१४) ४८·७५; ६·७६̇; ३०३·७५ । (१५) ७; ३·६̇३̇ । (१६) ·३३३७५० इत्यादि । (१७) २·६५४२९̇८७४४१̇ । (१८) ९२·४६८७̇५४५५६५३६७३४̇ । (१९) ३·७५९̇३̇; ३·०७̇७७०४९̇ । (२०) ६·३४५८̇; ·९̇११००१̇; ·४३̇१२̇ ।

उदाहरणमाला (३४) ९५ पृष्ठ से ९६ पृष्ठ तक

(१) १९·२ शि०; १८ पे० । (२) १०·५९८४ पा० । (३) १४ शि० ७·२ पे० । (४) ५ गिनी ६ शि० ६·७५ पे० । (५) १ आना ६·२४ पा०; १ शि० ८ पे० $२\frac{४}{२५}$ फा०; १-)। $१\frac{४}{५}$ रु० । (६) ९ शि० $२\frac{२}{५}$ फा०; १४ पोल २ गा० ६·२ इं०; २ दिन १२ घं० ५५ मि० २१ से० । (७) १-) रु०; २ पौं० ६ शि० $११\frac{१७}{२००}$ पे० । (८) २४ पौं० १० शि०; २ सेर १३·६ छ० । (९) ७ हंड्रेड्वेट २५·२ पौं० । (१०) १।।।)=।।। $१\frac{४}{५}$ रु०; २० दिन ६ घं०; ६ पौं० १३ शि० । (११) २ पौं० १६ शि० $५\frac{१}{४}$ पे० । (१२) ८३ पौं० ७ शि० $२\frac{३}{४}$ पे० । (१३) १५२ सप्ताह ५ दि० १० घं० $५४\frac{६}{११}$ से० । (१४) ७० रु० । (१५) २१ मील ।

उदाहरणमाला (३५) ९६ पृष्ठ से ९७ पृष्ठ तक

(१) ·३२८१२५; ·७९६८७५ । (२) ·२३४३७५; ·२५७८१२५ । (३) ४·८̇५१̇; ·७५̇८०६४५१६१२९०३२२̇ । (४) ·२ । (५) ·१६९६४̇२८५७१̇ । (६) ·६̇ । (७) ·७३१७ । (८) ·७८१२५ । (९)

·००२४३ इ० । (१०) ·११८२५३९६ । (११) ·०९७६५६२५ । (१२) ·२५ ।

उदाहरणमाला (३६) १०२ पृष्ठ से १०३ पृष्ठ तक

(१) ४४८९; १६७२८१; २७६६७६; ४८१६३६; ६९७२२५ । (२) ८२४४६४; ४५३५३६४; १२३१३०८१; २४१७६८८९; ३४१७५७१६ । (३) ५९१३६१००; ४९२६६३६१; ८६७४७९२०९; २७८६०३४५३२४१; १७४७५१००५८३८४ । (४) २७२१२१२२६४२५७६; ३३९०७७७१५४९४४४; ५३५५६१३९०५८४३६; ६६८९००६२७२५६२५; १७०२१९६९४७६७९२९ । (५) ५८३६७१७३५६१२१७४४; ६५०८२८०८८४१२२८८९; ८७८०१३९७६५७६००००००; २५०२०८१४९३०८१०७२३६; १५२५१२२५३१२५६६१५८४ । (६) $\frac{४९}{३९६९}$; $\frac{६४}{१२१}$; $\frac{१२२५}{१३६८९}$; $\frac{१६८१}{९८२०८१}$; $\frac{११०२५}{४०२८०४९}$ । (७) २१८०८९ फल मोल लिये; (८) ३९५६४१ रु० । (९) १००००० सैनिक ।

उदाहरणमाला (३७) १०८ पृष्ठ

(१) १८; ३७; ६८; ८९ और ८ शेष; ११५ । (२) १५५; ७३०; ८९१; १०४७; १६८२ । (३) १९३१; २२५०; ५३४९; ६१८८; ६२५५ । (४) ७६३३; ७८९६; १५४५२; ६२९९४; ८२६०२५ । (५) १३·८७; ७·४८; ३५०·२; ४८००·१ । (६) २·८१५४९; ८·९०३३७; ·७४८३३; २·३६६४३; ·२६२६७ । (७) ३·६०१५५; ८·३०६६२; १५·७१६२३; २५·९८०७६ । (८) ·७०७१०; ·७७४५९; ·९३५४१; ·९४५९०; ·८४७३१ । (९) ·९९८४६; ·८९५११; ·९०३५८; ·९३१६४ । (१०) ८५ पुरुष, ७३ स्त्रियां और ४२ लड़के । (११) ५२ । (१२) ११ । (१३) ५५ । (१४) २० । (१५) ४४ ।

उदाहरणमाला (३८) ११३ पृष्ठ

(१) २१९७; ४९१३; ५०६५३; २०५३७९; ४२१८७५ । (२) ३१७६५२३; ३००७६३०००; १९४१०४५३९; १४९७२१२९१; ७००२२७०७२ । (३) १०९२७२७; ३२२८२८८५६; १२२६१५३२७२३२; ६७३३७३०९७१२५ । (४) ·२१६; ·००००01; १·७२८; १५·६२५; ८५७·३७५ । (५) २४५·३१४३७६; २७०५४·०३६००८; ·००००३०६६४२९७; ·०४८२२८५४४; १·०९२७२७;

·००११२४८६४। (६) $\frac{८}{१२५}$; $\frac{१२५}{३४३}$; ४९$\frac{८}{२७}$; ४०५$\frac{२८}{१२५}$; ७५५८$\frac{१९७}{५१२}$; $\frac{५४}{१०२४}$।

उदाहरणमाला (३९) ११६ पृष्ठ

(१) ३७। (२) ३९। (३) ८१। (४) ८४। (५) ८७। (६) १०८। (७) ११४। (८) १३६। (९) १५१। (१०) १५९। (११) ५९१। (१२) ११११। (१३) १३६००९। (१४) ४३२१। (१५) ६५०८। (१६) ४४४४। (१७) ७००९। (१८) १२३४५। (१९) ७०००३। (२०) २०·०२। (२१) ३·०६४। (२२) ४·०५। (२३) ·८७। (२४) ·०१५१। (२५) ७$\frac{२}{५}$। (२६) $\frac{११}{१२}$। (२७) $\frac{३३}{७१}$। (२८) $\frac{५}{७}$। (२९) १·४४२। (३०) ·९६१। (३१) ·२९६। (३२) ·०१४। (३३) ·४४४। (३४) ·७५४। (३५) ·५६७। (३६) ·०१४।

उदाहरणमाला (४०) १२५ पृष्ठ

(१) ५८ रु० ९ आ० ६ पा० (२) ५७ रु० ६ पा० (३) ७९ रु० ७ आ०
(४) ८३ रु० ३ पा० (५) ११२ रु० १३ आ० ३ पा० (६) ७१५ रु० ८ आ०
(७) २२२१ रु० १ आ० ८ पा० (८) ५७३६ रु० ४ आ० ५ पा०
(९) ४२७३ रु० ६ आ० १$\frac{१}{२}$ पा० (१०) ४५६२ रु० १४ आ० ११$\frac{१}{४}$ पा०
(११) ८८ रु० ७$\frac{१}{२}$ पा० (१२) ४८३८ रु० ११ आ० १$\frac{१}{२}$ पा०
(१३) १८८२ रु० १४ आ० ६ पा० (१४) ११०७ रु० ५ आ० १$\frac{३}{४}$ पा०
(१५) ११३२ रु० १४ आ० $\frac{३}{४}$ पा० (१६) ३००३ रु०
(१७) ८३८ पौ० ३ शि० ३$\frac{११}{१६}$ पे० (१८) ३३६७३ पौ० ९ शि० १०$\frac{९}{३२}$ पे०
(१९) ७२ रु० ६ आ० ८ पा० (२०) ३१ पौ० ९ शि० १$\frac{३१}{३२}$ पे०।

उदाहरणमाला (४१) १२७ पृष्ठ

(१) ४९ रु० ३ आ० १०$\frac{३}{४}$ पा०। (२) ७ पौ० ८ शि० ८ पे०।
(३) १८७ पौ० १८ शि० १० पे० ३$\frac{१}{२}$ फा०।
(४) २९ रु० ७ आ० $\frac{३९}{६४}$ पा०। (५) ४४ रु० ८ पा०।
(६) ५७ पौ० ८ शि०। (७) १५० पौ० १७ शि० ६$\frac{३७५}{४४८}$ पे०।
(८) ११ पौ० १५ शि० ७$\frac{१}{८}$ पे०। (९) २६५ रु० ९ आ० ५$\frac{१}{४}$ पा०।
(१०) ८७१ रु० १५ आ० ५$\frac{१}{४}$ पा०। (११) ९२ रु० ५ आ० ५$\frac{१९}{२५}$ पा०।

(१२) ४६६४ रु० ३ आ० १०$\frac{१}{२}$ पा० । (१३) ४४६ रु० १४ आ० ० पा० ।
(१४) २३९ पौं० ७ शि० ९$\frac{३}{४}$ पें० । (१५) ७९९९ रु० १५ आ० ९$\frac{१५}{१६}$ पा० ।

उदाहरणमाला (४२) १३१ पृष्ठ से १३२ पृष्ठ तक

(१) ३४ (२) ३९० (३) १९५ (४) दूसरा (५) चौथा (६) २५$\frac{२}{३}$ (७) १ फ़ु० २ इञ्च (८) ४, ३, १०४ (९) ४ रु० ८ आ० (१०) ४ रु० १० आ० (११) १४ । (१२) ३९ । (१३) ३$\frac{३}{४}$ । (१४) ·०६ । (१५) २५ । (१६) १२ आ० ६ पा० । (१७) २७ : ६४ । (१८) २ : १ । (१९) २५२ : ३१५ : ३६० : ४०० ।

उदाहरणमाला (४३) १३८ पृष्ठ से १४३ पृष्ठ तक

(१) १०१$\frac{३}{५}$ दिन (२) २८ एकड़ (३) ३ रु० ८ आ० ५$\frac{७}{१९}$ पा०
(४) ९७३ रु० १५ आ० ४ पा० (५) १४५४ बैल (६) ६ फ़ु०
६$\frac{२}{३}$ इ० (७) ७$\frac{१}{१७}$ आने (८) २४०० पौं० (९) ७०२३ रु० १० आ०
८ पा० (१०) ९$\frac{३}{५}$ पा० (११) १०० रुपये (१२) ११ बजकर ३३
सेकण्ड (१३) १७$\frac{११}{१७}$ सेकण्ड (१४) ८ बजकर ५ मि० ४९$\frac{१}{११}$ से०
(१५) ६२$\frac{१}{२}$ दिन (१६) $\frac{७५}{९२}$ सेर (१७) १८ मनुष्य (१८) १२ रु०
(१९) २ माशा (२०) १४० टोकरी (२१) २$\frac{२}{३}$ दिन (२२) ५० दिन
(२३) २५ सेर (२४) ३७$\frac{१}{२}$ (२५) १$\frac{१}{२}$ सेकण्ड (२६) ७$\frac{१}{५}$ दिन
(२७) ६$\frac{९}{१९}$ दिन (२८) २० सेर (२९) ७५०० रु० (३०)
१९$\frac{२५१}{५२८}$ मील (३१) १८ सेर (३२) २० रु० (३३) ६३ रु० २ आ०
९$\frac{३}{१३}$ पा० (३४) ६$\frac{६}{७}$ दिन; पुरुष १।) रु०, लड़का ॥)।१ (३५) ५१ ताव
(३६) अ २४० रु०, ब ३३६ रु० (३७) ४५ रु० (३८) २$\frac{११}{१२}$ दिन
(३९) ५$\frac{१}{४}$ घंटे (४०) १४ रु०; ३५ रु० (४१) ८ सेर (४२)
४ रु० मन (४४) २७ रु० ३ आ० ४$\frac{२}{३}$ पा० (४५)
१$\frac{२}{५}$ सेर (४३) ४ रु० मन
(४६) ८$\frac{२}{५}$ दिन (४७) ८ दिन (४८) ४६ रु० ८ आ०
४४० मील
(४९) ९३ : ३५ (५०) ५२$\frac{२}{७}$ दिन ।

उदाहरणमाला (४४) १४६ पृष्ठ से १५० पृष्ठ तक

(१) ३० रु० (२) १५६ एकड़ (३) ८० घोड़े (४) २८१$\frac{३}{५}$ मील

(५) ५$\frac{१}{३}$ घंटे (६) ५२५ मनुष्य (७) ४८ सेर (८) १४२$\frac{३}{१६}$ दिन (९) ९०० एकड़ (१०) १८० सेर (११) ७$\frac{१७}{२७}$ घंटे (१२) ५०।

उदाहरणमाला (४५) १५३ पृष्ठ से १५५ पृष्ठ तक

(१) ५$\frac{५}{८}$ दिन (२) २$\frac{२}{३}$ दिन (३) ६० दिन (४) ९ घंटे (५) १२$\frac{१}{२}$ दिन (६) २$\frac{१}{३}$ दिन (७) $\frac{१}{६}$ हौज (८) अ २०$\frac{४}{७}$ दि०, च १२$\frac{१}{११}$ दि०, क २८$\frac{४}{५}$ दि० (९) २$\frac{७३}{२११}$ घण्टे (१०) १$\frac{११}{१८}$ दि० (११) १२ घण्टे; ३६ मील पर अ के नगर से (१२) ४$\frac{१}{२}$ घण्टे; ३० मील पर (१३) २ घंटे; ४५ मील पर (१४) ४ बज कर १२ मिनट (१५) ३ बज कर ३२$\frac{८}{११}$ मिनट (१६) ८ बज कर १०$\frac{१०}{११}$ मिनट (१७) ९ बज कर ४८ मिनट और ५०$\frac{२}{११}$ मिनट (१८) ४८ मिनट (१९) १२ बजने में १$\frac{३}{४}$ मिनट कम (२०) ६ दिन।

उदाहरणमाला (४६) १५८ पृष्ठ से १६० पृष्ठ तक

(१) ३४$\frac{११}{१६}$ मील (२) २ पौ० १२ शि० ६ पे० (३) ५ आना
(४) २७० दिन (५) ७ (६) २७० (७) १० मन (८) ८० रु०
(९) १७६४० रु० (१०) ४०$\frac{१०}{११}$ (११) २४० रु० (१२) ६० रु०
(१३) ३९० रु० (१४) ८$\frac{८}{१३}$ (१५) ६० दिन (१६) ४१$\frac{२}{३}$ दिन
(१७) ११ मन ८ सेर (१८) २ घं० ४० मि० (१९) ४ घंटा
(२०) १० घंटा (२१) १६ (२२) ७ से० ८ छ० (२३) ७$\frac{२३}{३१}$ दिन
(२४) ३३$\frac{६}{१४३}$ (२५) ११८ रु० १२ आ०

उदाहरणमाला (४७) १६२ पृष्ठ से १६४ पृष्ठ तक

(१) १२·८३; ७·६६२५; ४·३४। (२) ८१ साल। (३) २१५·५। (४) ३२ लड़के। (५) १२५ मनुष्य। (६) ७५ अंश। (७) ३॥) रु० (८) ३$\frac{१}{२}$ आने। (९) १०स्टोन। (१०) ४ रु० ८ आ० ६$\frac{२}{५}$ पा० (११) १०$\frac{१}{२}$ मील। (१२) १० स्टोन ३$\frac{१}{२}$ पौण्ड। (१३) १४ साल। (१४) ५० साल। (१५) ९ स्टोन ६$\frac{१}{२}$ पौण्ड। (१६) १० स्टोन। (१७) ३२०) रु०। (१८) ११ साल। (१९) १७·८ साल। (२०) १७·८ साल। (२१) ५१ अंश। (२२) ७) रु०।

उदाहरणमाला (४८) १७२ पृष्ठ से १७७ पृष्ठ तक

(१) ३४·४०९ फी०। (२) ७५ फी०। (३) १३ फी०। (४) $\frac{५}{४}$ गुना। (५) ८·४८५ फी०। (६) ८० इं०। (७) २१० वर्ग इञ्च। (८) ९·८९९ व० इं०। (९) ५० मील। (१०) १२४·४ इत्यादि गज। (११) ७०·७१ इत्यादि फी०। (१२) २३२३२० व० फी०। (१३) ४० फी०। (१४) ७६८ व० फी०। (१५) २६२$\frac{४}{५}$ फी०। (१६) लंबाई १८ गज और चौड़ाई ९ गज। (१७) लम्बाई २४ गज और चौड़ाई ८ गज। (१८) ३०७२ व० फी०। (१९) ३ फी०। (२०) २९१ व० फी०। (२१) ३$\frac{१}{२}$ फी०। (२२) २१० व० फी०। (२३) १२६ फी०। (२४) १३०० व० फी०। (२५) ३७२ फी० १$\frac{३९}{३०}$ इं०। (२६) २४ रु० १२ आ०। (२७) १० फी०। (२८) ४७ व० फी०। (२९) १२७५$\frac{१}{२}$ व० फी०। (३०) ११ रु० १२ आ० २$\frac{३}{३}$ पा०। (३१) ६५६ व० हाथ। (३२) २८४$\frac{७}{८}$ व० फी०। (३३) १७०१ रु०। (३४) २७७५ व० फी०। (३५) ७६८। (३६) ८१६०० व० फी०। (३७) १६७८ व० फी०। (३८) १२८ फी०। (३९) ४८ फी०। (४०) २० फी०; १२ फी०। (४१) १६ फी०। (४२) १५ फी०। (४३) ७$\frac{१}{२}$ फी०। (४४) १५$\frac{२}{७}$ फी०। (४५) लम्बाई ३० फी०, चौड़ाई २४ फी०, उँचाई ८ फी०। (४६) १८ रु० १० आ० ८ पा०। (४७) ४२ फी०; ११ फी०। (४८) ३।≶)॥; $\frac{१}{३}$ रु०। (४९) ५$\frac{१३}{१८}$ व० फी०। (५०) १३ रु० ६ आ०।

उदाहरणमाला (४९) १८२ पृष्ठ से १८५ पृष्ठ तक

(१) १५० व० फी०। (२) २२$\frac{१}{२}$ घ० फी०। (३) ७ फी०। (४) १२० फी०। (५) ६ फी०। (६) १८ फी०। (७) ५$\frac{३}{५}$। (८) १९३५२$\frac{३९२}{११०९}$ ग्या०। (९) ५७$\frac{३}{८}$ घन इञ्च। (१०) ३२०००। (११) ३ इञ्च। (१२) ३०७४४ ईंटें; २१५२ रु० १ आ० ३$\frac{६}{२५}$ पा०। (१३) ४$\frac{११}{१६}$ व० फी०; ११९३·२ घन इञ्च। (१४) २ फी० १०·६४ इं०। (१५) १२$\frac{१}{२}$ वर्ग फी०; ३ घन फीट १२ घन इञ्च के लगभग। (१६) २$\frac{१}{२}$ फी०। (१७) १$\frac{१}{२}$ फी०। (१८) ५ मन ३८ सेर। (१९) २१$\frac{३}{५}$ मि०। (२०) ३·८४ इञ्च। (२१) २७ घं० ४१ मि० ३२$\frac{४}{१३}$ से०।

उदाहरणमाला (५०) १८५ पृष्ठ से १८६ पृष्ठ तक

(१) २८ प्रति सैकड़ा; १८ प्र० सै० । (२) ७० प्र० सै०; ३६ प्र० सै०। (३) ४५ प्र० सै०; १८ प्र० सै० । (४) १३·७ प्र० सै०; ९५·२ प्र० सै० । (५) ७१·८७५ प्र० सै०; ७ प्र० सै० । (६) $\frac{३}{१००}$ । (७) $\frac{१३}{२०}$ । (८) $\frac{११}{२५}$ । (९) $\frac{९}{२०}$ । (१०) $\frac{११}{२०}$ । (११) २ रु० ८ आ० । (१२) ८० रु० । (१३) ४ रु० ११ आ० । (१४) ११ शि० । (१५) ३०० रु० । (१६) १०० रु० २ आ० ६ पा० । (१७) ५० । (१८) ११२५ रु० ६ आ० । (१९) करीब १२·५ प्रतिशत । (२०) ९३७ पौं० १६ शि० ६ पे० ।

उदाहरणमाला (५१) १९२ पृष्ठ से १९३ पृष्ठ तक

(१) ५० रु० (२) १३३ रु० (३) ८४० पौं० (४) १८९ पौं० १ शि० ३$\frac{३}{१६}$ पे० (५) १४२२ पौं० ८ शि० १०$\frac{१}{२}$ पे० (६) ९०१ रु० १५ आ० ५$\frac{७}{२५}$ पा० (७) ८२ पौं० १$\frac{१}{५}$ पे० ब्याज; ६०२ पौं० १३ शि० ५$\frac{१}{५}$ पे० मिश्रधन (८) ६५ पौं० ११ शि० ९ पे० (९) १०२४ पौं० ७ शि० ७$\frac{१}{५}$ पे० (१०) ४१४ पौं० ११ शि० ८ पे० (११) ३६१ पौं० ८ शि० ६$\frac{६}{७}$ पे० (१२) $\frac{६९}{१०४}$ प्रतिवर्ष प्रतिशत ब्याज की दर (१३) २$\frac{३}{१०९}$ वर्ष (१४) ११५६ रु० ११ आ० ८ पा० (१५) २५ वर्ष (१६) ५ प्रतिशत ब्याज की दर (१७) १० वर्ष (१८) १५२० पौंड (१९) १५ वर्ष (२०) ८०० रु० मूलधन; ४ प्रतिशत ब्याज की दर ।

श्रीमद्गणकधुरन्धरबापूदेवस्य पण्डितेन्द्रस्य ।
तनयो गणपतिशास्त्री पूर्वार्द्धं गणितकौमुद्याः ॥ १ ॥
विनिबद्ध्य रुचिरमादौ गणिते बालप्रवेशाय ।
भागं द्वितीयमधुना विदुषां करयोः समर्पयति ॥ २ ॥

इति शम्

द्वितीय भाग समाप्त ।



प्रथम परीक्षोपयोगी ग्रन्थ–